2008.11.04

物性物理学 C　レポート問題

提出期限：　2008 年 11 月 18 日（火）

提出先：　理学部 2 号館 402 号室（北畑）

次の問題のうち 3 題をえらんで答えなさい。

1. 体積 $2V$ の箱が取り外し可能な仕切りによって体積 V の 2 つの領域に分けられている。そのそれぞれに 2 種類の単原子理想気体 A、B が N モルずつ入っている。この仕切りを取り除いて十分時間がたったとき、A、B は十分に混ざり合った。ただし、A と B は相互作用しないとする。初期状態から終状態までのエントロピー~~ΔS~~の変化 ΔS を求めなさい。

2. 1 次元ランダムウォークにおいて、左右のサイトに移動する確率が異なる場合を考える。すなわち、

$$x_{i+1} = x_i + \xi_i$$

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{確率 } (1+a)/2 \\ -1 & \text{確率 } (1-a)/2 \end{cases}$$

時刻 i にサイト x にいる確率を $P(x, i)$ として、$P(x, i+1)$ を $P(x, i)$、$P(x+1, i)$、$P(x-1, i)$ で表しなさい。また、$P(x, i) \to P(x, t)$、$P(x, i+1) \to P(x, t+\Delta t)$、$P(x \pm 1, i) \to$ ~~$P(x \pm \Delta t, t)$~~ $P(x \pm \Delta x, t)$ とおきなおして、$\Delta t/\Delta x^2 = C$、$a\Delta x/\Delta t = A$ を一定に保ったまま、Δt と Δx を 0 に近づけたときに得られる方程式を導出しなさい。

3. 拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u$$

を考える。ただし、局所平衡の仮定がなりたっており、時刻 t、位置 x での濃度が $u(x, t)$ である。濃度の高い粒子浴と濃度の低い粒子浴に系が接しているとき、系は定常状態になりうる。この定常解を 1 次元と 2 次元（軸対称）の場合について求めなさい。ただし、境界条件として、

(i) 1 次元の場合は、濃度を x の関数 $u(x)$ として、$u(x_1) = u_1$, $u(x_2) = u_2$ とする。

(ii) 2 次元の場合は極座標を考え、濃度を r の関数 $u(r)$ として、$u(r_1) = u_1$, $u(r_2) = u_2$ とする。

（ヒント）$\partial u/\partial t = 0$ とおくと(i)は $u(x)$ について、(ii)は $u(r)$ についての常微分方程式になる。

4. ランジュバン方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \xi(t)$$

であったが、質量が十分に小さいとして、左辺を無視することによって、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\gamma}\xi(t) \qquad (*)$$

と書ける。ただし、$\langle\xi(t)\rangle = 0$, $\langle\xi(t)\,\xi(s)\rangle = 2M\delta(t-s)$ である。この方程式に従って、質点が運動するとき、$\langle x(t)\rangle$ および $\langle(x(t) - x(0))^2\rangle$ を求めなさい。

5. 上問で得られた方程式(*)を数値計算を用いて解き、$<x(t)>$ および $<(x(t)-x(0))^2>$のグラフを書きなさい。ただし、何回の試行を平均化したかも書くこと。

6. 外力 $F(x)$が加わったとき、粘性極限（質量 0 の極限）をとると、x に関する分布 $P(x,\ t)$についての方程式（スモルコフスキー方程式）が得られる。すなわち、

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{1}{m\gamma}\left[-\frac{\partial}{\partial x}F(x)+k_{\mathrm{B}}T\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]P(x,t)$$

この方程式の定常解を求めなさい。ただし、$F(x)$はポテンシャル力であるとし、そのポテンシャルは $\Phi(x)$で書けるとする。すなわち、

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial x}=F(x)$$

である。また、$x\to\pm\infty$ のとき、$\Phi\to\infty$、$F\to 0$ であるとする。

7. 拡散方程式は、時刻 t、位置 x での濃度が $u(x,\ t)$であるとすると、エネルギー汎関数

$$\cancel{F\{c(x)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{2}\left|\nabla u\right|^2\mathrm{d}x}\qquad(**)$$

$$F\{u(x)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{2}\left|\nabla u\right|^2\mathrm{d}x$$

が常に減少すると仮定し、

$$\cancel{\frac{\partial c}{\partial t}=-a\frac{\delta F}{\delta u}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-a\frac{\delta F}{\delta u}$$

とおくことにより得られる。初期値がデルタ関数の拡散方程式の解（グリーン関数）を(**)に代入することによって、エネルギーF がどのように減少するか計算しなさい。

講義に対する感想、要望などあれば書いてください（成績には反映されません）

講義のシラバス・資料など： http://cu.phys.s.chiba-u.ac.jp/lecture/busseiC/