2009.1.20

物性物理学 C　レポート略解

1. (i) $\dfrac{dx}{dt}=-x^3+x=0$ とおくと、$x = 0, 1, -1$

それぞれのまわりで展開し、安定性を調べる。

$x = 0$ まわりでは、$x = 0 + \Delta x$ とおいて、$\dfrac{d\Delta x}{dt}=\Delta x+O(\Delta x^2)$ 　よって不安定。

$x = 1$ まわりでは、$x = 1 + \Delta x$ とおいて、$\dfrac{d\Delta x}{dt}=(1+\Delta x)-(1+\Delta x)^3=-2\Delta x+O(\Delta x^2)$ 　よって安定。

$x = -1$ まわりでは、$x = -1 + \Delta x$ とおいて、$\dfrac{d\Delta x}{dt}=(-1+\Delta x)-(-1+\Delta x)^3=-2\Delta x+O(\Delta x^2)$

よって安定。

(ii) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dy}{dt}=0$ とおくと、これを満たすのは、$x = y = 0$ のみであることがわかる。$x = y = 0$ のまわりで展開すると

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}+O(\Delta x^2,\Delta x\Delta y,\Delta y^2)$$

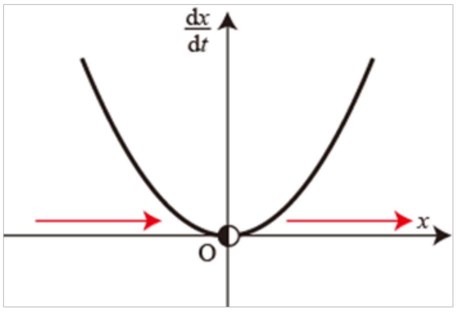
この関数行列の固有値を求めると、

$(-\lambda)(1-\lambda)+1=0$ より $\lambda=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ となる。よって、不安定（不安定渦状点）になる。

(iii) $\dfrac{dx}{dt}=x^2=0$ とおくと、$x = 0$ が固定点。このまわりで展開することを考えると、

$x = 0 + \Delta x$ とおいて代入すると $\dfrac{d\Delta x}{dt}=0+O(\Delta x^2)$ と、Δx の係数が 0 になる。このようなときに限り、2 次の項が重要になる。今回は、$\Delta x \to +0$ のとき、$dx/dt > 0$、$\Delta x \to -0$ のとき、$dx/dt > 0$ となるため、x が正のときには発散、x が負のときには 0 に収束する。

「安定」の定義は、どの方向から近づいても漸近することなので、$x = 0$ は不安定な固定点。



（そのまま微分方程式を解くと、$-1/x = t + C$ となる。初期値を $t = 0$ で $x = x_0$ とすると、$C = -1/x_0$ となり、$x = x_0/(1 - x_0 t)$となる。このグラフを書くことでも挙動はわかります。）

2. $\dfrac{dx}{dt}=x(1-x)$

変数分離法により解くことができる

$\dfrac{dx}{x(1-x)}=dt$ として、両辺を積分する。

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x(1-x)} = \int_0^t \mathrm{d}t$$ より $$\int_{x(0)}^{x(t)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) \mathrm{d}x = \int_0^t \mathrm{d}t$$ となり、

$$\left(\ln|x(t)| - \ln|1-x(t)|\right) - \left(\ln|x(0)| - \ln|1-x(0)|\right) = t$$

これより、$\ln\left|\frac{x(t)(1-x(0))}{(1-x(t))x(0)}\right| = t$ となり、$\left|\frac{x(t)(1-x(0))}{(1-x(t))x(0)}\right| = \exp(t)$。よって、両辺とも正となることがわかり、絶対値が外れる。これを解きなおすと、$x(t) = \frac{x(0)}{x(0) + (1-x(0))\exp(-t)}$ となる。

$t = 0$ とすると、$x = x(0)$となり、初期条件を満たしており、$t \to \infty$では、$x(t) \to 1$ となる。
元の方程式を力学系としてみると、$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$ とおいて、$x = 0, 1$ が固定点。この周りで展開することにより、$x = 0$ は不安定、$x = 1$ は安定であると求められる。これは、厳密解の結果と一致している。
（$1/x$ の不定積分が $\ln |x| + C$ と絶対値が入るのが面倒です。場合分けしてもよいのですが、そのまま計算すると自然に消えてくれます。）

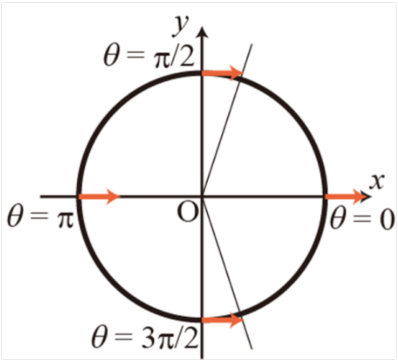
3. $r^2 = x^2 + y^2$、$\tan\theta = y/x$ より、$\partial r/\partial x = \cos\theta$、$\partial r/\partial y = \sin\theta$、$\partial\theta/\partial x = -\sin\theta/r$、$\partial r/\partial y = \cos\theta/r$ となる。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \cos\theta\left[ax - \omega y - (x^2+y^2)(x-by)\right] + \sin\theta\left[\omega x - ay - (x^2+y^2)(y+bx)\right] \\ &= ar - r^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\sin\theta}{r}\left[ax - \omega y - (x^2+y^2)(x-by)\right] + \frac{\cos\theta}{r}\left[\omega x - ay - (x^2+y^2)(y+bx)\right] \\ &= \omega - br^2\end{aligned}$$

（この場合だと、等位相面（アイソクライン）は放射状の半直線ではなく、らせん状になります。）

4. 原点を通る放射状の半直線上では、位相は同じである。つまり、$\theta = 0, \pi$のときに x 軸の正の向きに弱い摂動を加えても、位相は変化しない。それに対して、$\theta = \pi/2$ のときに x 軸の正の向きに弱い摂動を加えると位相が遅れる方向に、$\theta = 3\pi/2$ のときに x 軸の正の向きに弱い摂動を加えると位相が進む方向に、動くはずである。



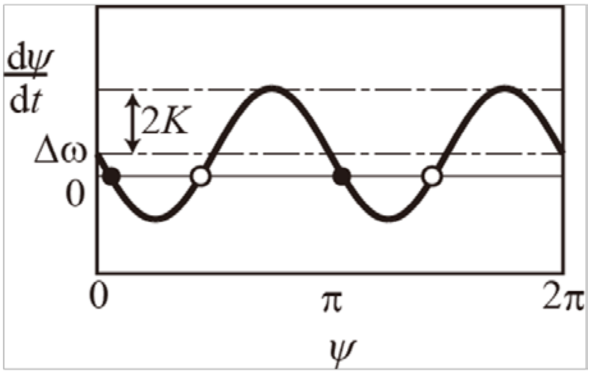
数式を使って表現すると、x を $x + \Delta x$ としたときに、θにどう影響するかを見ればよい。

$\Delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\theta}{\partial y}\Delta y$ であることを考えると、$\partial\theta/\partial x$ の符号で決まる。$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}$ より、直感的に与えたものと同じ結果が得られる。
（このような考え方を使うと、リミットサイクル振動子に摂動を加えたときの挙動も位相のみを考えるだけで理解できます。）

5. $\psi = \theta_2 - \theta_1$ とおくと

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \omega_2 - \omega_1 - 2K\sin[2(\theta_2 - \theta_1)] = \Delta\omega - 2K\sin 2\psi$$

となる。縦軸を $\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}t$、横軸を$\psi$としてグラフを書くと図のようになる。



$\Delta\omega \geq 2K$ のときには固定点がないため、同期することはない。一方、$\Delta\omega < 2K$ のときには、初期の位相差によって、位相差が 0 に近いところ（同相同期）あるいはπに近いところ（逆相同期）で同期する。$\Delta\omega$が 0 なら、位相差 0 の同相同期、または位相差πの逆相同期になる。

（どちらになるかは初期位相差に依存し、初期位相差がπより小さければ同相同期、πより大きければ逆相同期になります。）

6. $F = \frac{Na\varepsilon}{2}\phi(1-\phi) + Nk_\mathrm{B}T[\phi\ln\phi + (1-\phi)\ln(1-\phi)]$を$\phi = 1/2$ のまわりで展開する。

$\Delta\phi = \phi - 1/2$ とおき、代入すると、

$$F = \frac{Na\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{2}+\Delta\phi\right)\left(\frac{1}{2}-\Delta\phi\right) - Nk_\mathrm{B}T\left[\left(\frac{1}{2}+\Delta\phi\right)\ln\left(\frac{1}{2}+\Delta\phi\right) + \left(\frac{1}{2}-\Delta\phi\right)\ln\left(\frac{1}{2}-\Delta\phi\right)\right]$$

$\ln(1+\delta) = \delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} + \cdots$ を利用すると、

$$F = \frac{Na\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{4}-\Delta\phi^2\right) - Nk_\mathrm{B}T\left[-\ln 2 + \left(\frac{1}{2}+\Delta\phi\right)\left(2\Delta\phi - \frac{4\Delta\phi^2}{2} + \frac{8\Delta\phi^3}{3} - \frac{16\Delta\phi^4}{4}\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{2}-\Delta\phi\right)\left(-2\Delta\phi - \frac{4\Delta\phi^2}{2} - \frac{8\Delta\phi^3}{3} - \frac{16\Delta\phi^4}{4}\right)\right] + O\left(\Delta\phi^6\right)$$
$$= \frac{Na\varepsilon}{8} + Nk_\mathrm{B}T\ln 2 + \left(-\frac{Na\varepsilon}{2} + 2Nk_\mathrm{B}T\right)\Delta\phi^2 + \frac{4Nk_\mathrm{B}T}{3}\Delta\phi^4 + O\left(\Delta\phi^6\right)$$

2 次の項の係数の正負が変わるときに安定性が変化するので、その条件は

$-\frac{Na\varepsilon}{2} + 2Nk_\mathrm{B}T = 0$ より $T = \frac{a\varepsilon}{4k_\mathrm{B}}$ である。

（問題の式の符号が間違っていました。申し訳ありません。正確には、第 1 項の係数も正確には 1/2 ではなく、1 です。係数の間違いを考慮すると $T = \frac{a\varepsilon}{2k_\mathrm{B}}$ になります。講義中の導出の際にダブルカウンティングによる項を入れすぎたようです）

7. 定常解なので$\partial\phi/\partial t=0$とし、1次元であることを考慮して、

$$-b\phi^3-a\phi+\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}=0$$

$\phi=A\tanh\left(\frac{x}{\xi}\right)$とおくと、$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}=\frac{A}{\xi}\frac{1}{\cosh^2(x/\xi)}=\frac{A}{\xi}\left(1-\tanh^2(x/\xi)\right)=\frac{1}{\xi}\left(A-\frac{\phi^2}{A}\right)$

よって、$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{2}{A\xi}\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{2}{A\xi^2}\phi\left(A-\frac{\phi^2}{A}\right)=-\frac{2}{\xi^2}\phi+\frac{2}{A^2\xi^2}\phi^3$

これらより、

$$-b\phi^3-a\phi-\frac{2\varepsilon}{\xi^2}\phi+\frac{2\varepsilon}{A^2\xi^2}\phi^3=0$$

aが負であることを考慮し、ϕの1次と3次の係数を比較して、　$\xi=\sqrt{-\frac{2\varepsilon}{a}}$, $A=\sqrt{-\frac{b}{a}}$ となる。

（講義中に示した答えが間違っていました。すみません。）