2008.12.09

物性物理学 C　レポート問題

提出期限：　2009 年 1 月 13 日（火）

提出先：　理学部 2 号館 402 号室（北畑）

次の問題のうち 3 題をえらんで答えなさい。

1. 次の力学系の固定点をすべて求め、それぞれの安定性を調べなさい。

(i) $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x^3 + x$$

(ii) $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\left(y^2 - 1\right)y - x \end{cases}$$

(iii) $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2$$

（ひとこと）(iii)は講義中に扱わなかったものです。一度考えてみてください。

2. ロジスティック方程式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(1 - x) \qquad (*)$$

は解析的に解くことができる。解析的な解を求め、$t \to \infty$としたときの挙動を調べなさい。ただし、初期条件 $x(0) > 0$ であるとする。また、(*)式を力学系として考えたときの安定固定点、不安定固定点との関係を考察しなさい。

3. Stuart-Landau 方程式は、厳密には

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax - \omega y - \left(x^2 + y^2\right)(x - by) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \omega x + ay - \left(x^2 + y^2\right)(y + bx) \end{cases} \qquad (\bigstar)$$

（dy/dt の式の ay の項の符号が逆でした）

となる。$r^2 = x^2 + y^2$、$\tan\theta = y / x$ とおいて、極座標表示での方程式を導出しなさい。

4. 上問の（★）式で $b = 0$、$a = 1$ とした Stuart-Landau 方程式、

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax - \omega y - \left(x^2 + y^2\right)x \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \omega x + ay - \left(x^2 + y^2\right)y \end{cases}$$

（dy/dt の式の ay の項の符号が逆でした）

に従う系が、極座標表示で $r = 1$ のリミットサイクル上を回っている。位相を $\tan\theta = y / x$ で定義すると、

$d\theta / dt = \omega$となり、また、リミットサイクル以外の点(x, y)の位相もθ=arctan(y / x)であらわされる。このとき、リミットサイクルを回っている系が、$\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ のときに x 軸の正の向きに弱い摂動を加えた。それぞれの場合で、位相はどうなるか考察しなさい。

5. 位相記述された 2 つの振動子が下の式のような相互作用をしている。

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 + K \sin\left[2(\theta_2 - \theta_1)\right] \\ \dfrac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 + K \sin\left[2(\theta_1 - \theta_2)\right] \end{cases}$$

どのような引き込み現象が見られると予想されるか？ $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \geq 0$ として、K と$\Delta\omega$の大きさを比較しつつ論じなさい。

6. スピン系（イジング系）の自由エネルギーは上向きのスピンの割合をϕとして

$$F = \frac{Na\varepsilon}{2}\phi(1-\phi) - Nk_B T\left[\phi\ln\phi + (1-\phi)\ln(1-\phi)\right]$$

と書けた。ただし、N はサイト数、a はそれぞれのサイトの最近接サイト数、εは同じ向きと異なる向きでの近接相互作用の差、k_B はボルツマン定数、T は温度である。$\phi = 1/2$ のまわりで対称であることを用いて、4 次まで Taylor 展開しなさい。また、均一状態が不安定化するときの温度を求めなさい。

7. 局所的な自由エネルギーF が

$$F = \frac{b}{4}\phi^4 - \frac{a}{2}\phi^2$$

であらわされる系がある。空間的な広がりを考えると

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\delta F_{\mathrm{total}}}{\delta\phi} = -b\phi^3 - a\phi + \varepsilon\nabla^2\phi$$

となる。$a < 0$ のとき、1 次元系での定常解が講義中に示したものであることを、

$$\phi = A\tanh\left(\frac{x}{\xi}\right)$$

とおいて方程式に代入し、A とξを求めることによって確かめなさい。

講義に対する感想、要望なども書いてください（成績には反映されません）
講義のシラバス・資料など： http://cu.phys.s.chiba-u.ac.jp/lecture/busseiC/

レポートを返却しますので、1 月 20 日以降に取りに来てください。