

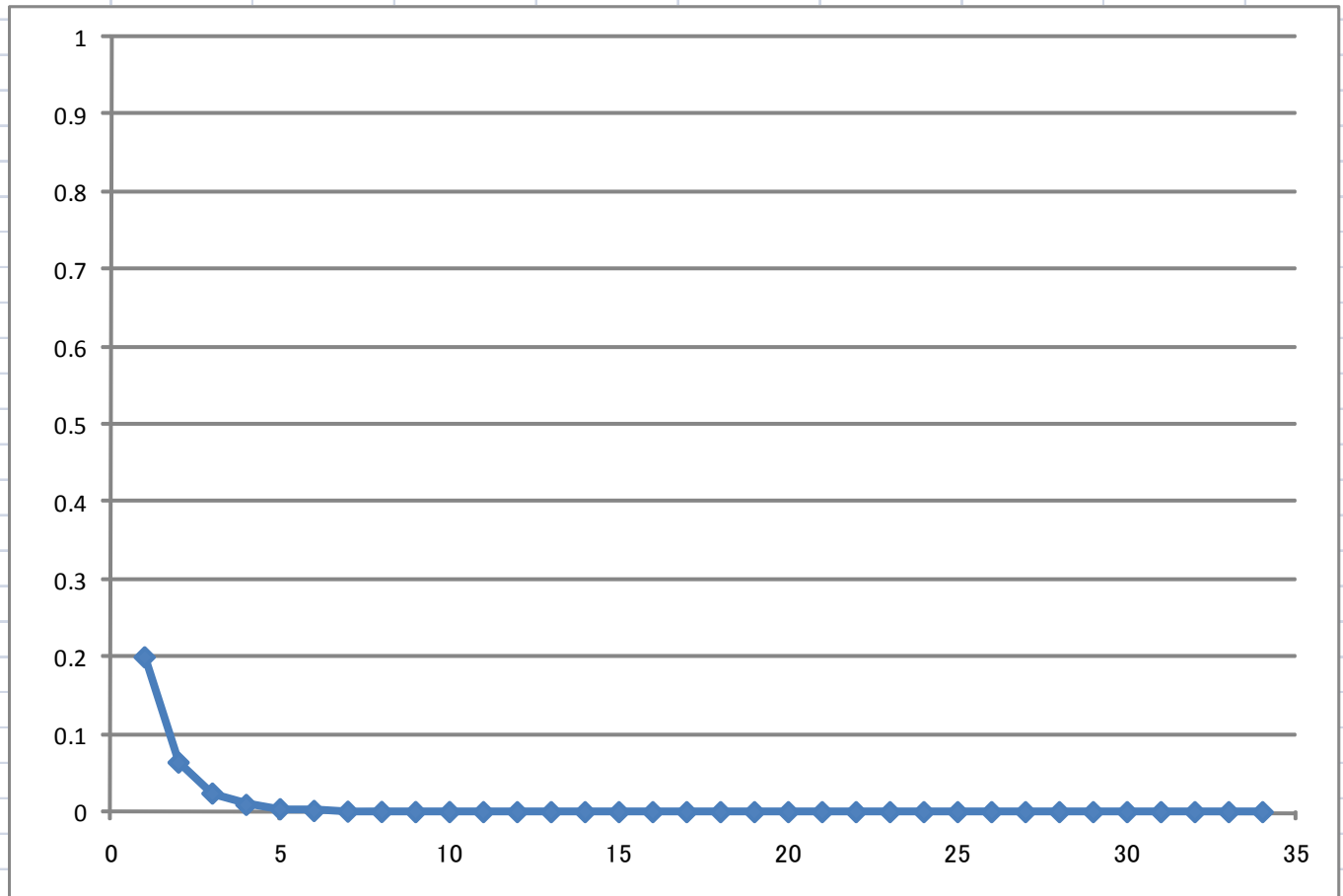
2010.1.19
物性物理学C

カオス と フラクタル

ロジスティック写像

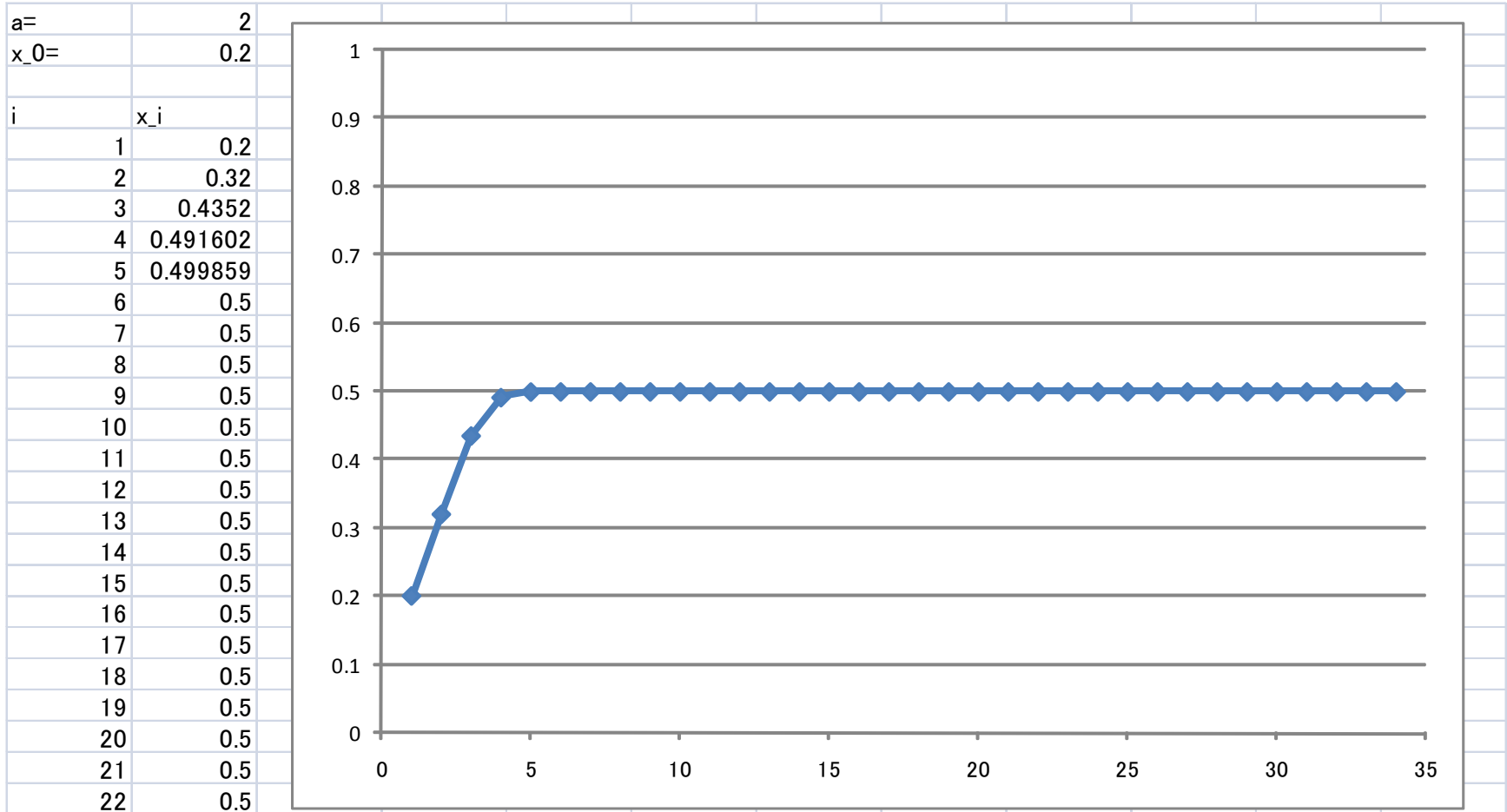
$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad a = 0.4$$

a=	0.4
x_0=	0.2
i	x_i
1	0.2
2	0.064
3	0.023962
4	0.009355
5	0.003707
6	0.001477
7	0.00059
8	0.000236
9	9.43E-05
10	3.77E-05
11	1.51E-05
12	6.04E-06
13	2.41E-06
14	9.66E-07
15	3.86E-07
16	1.55E-07
17	6.18E-08
18	2.47E-08
19	9.89E-09
20	3.96E-09
21	1.58E-09
22	6.33E-10



ロジスティック写像

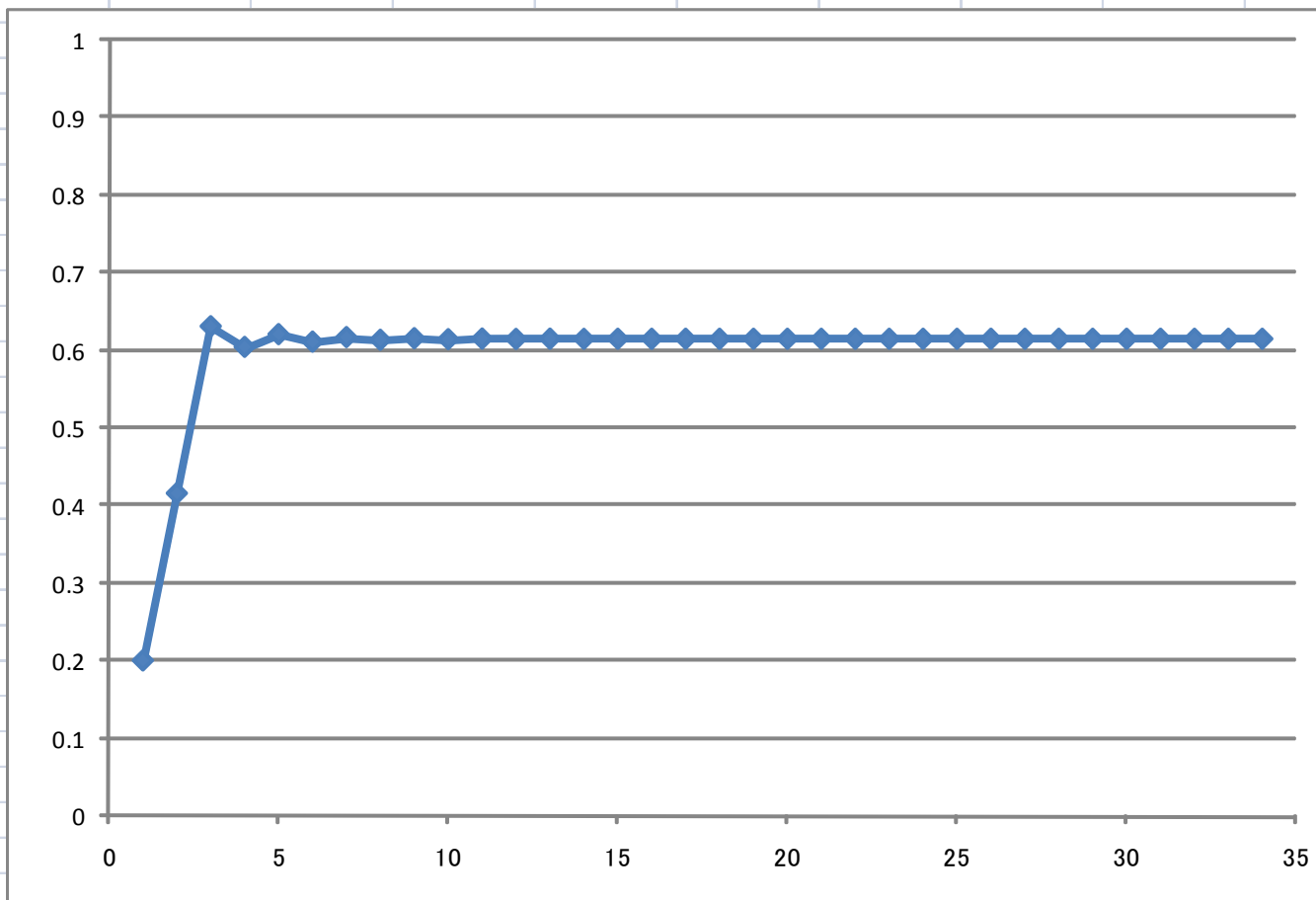
$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad a = 2.0$$



ロジスティック写像

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad a = 2.0$$

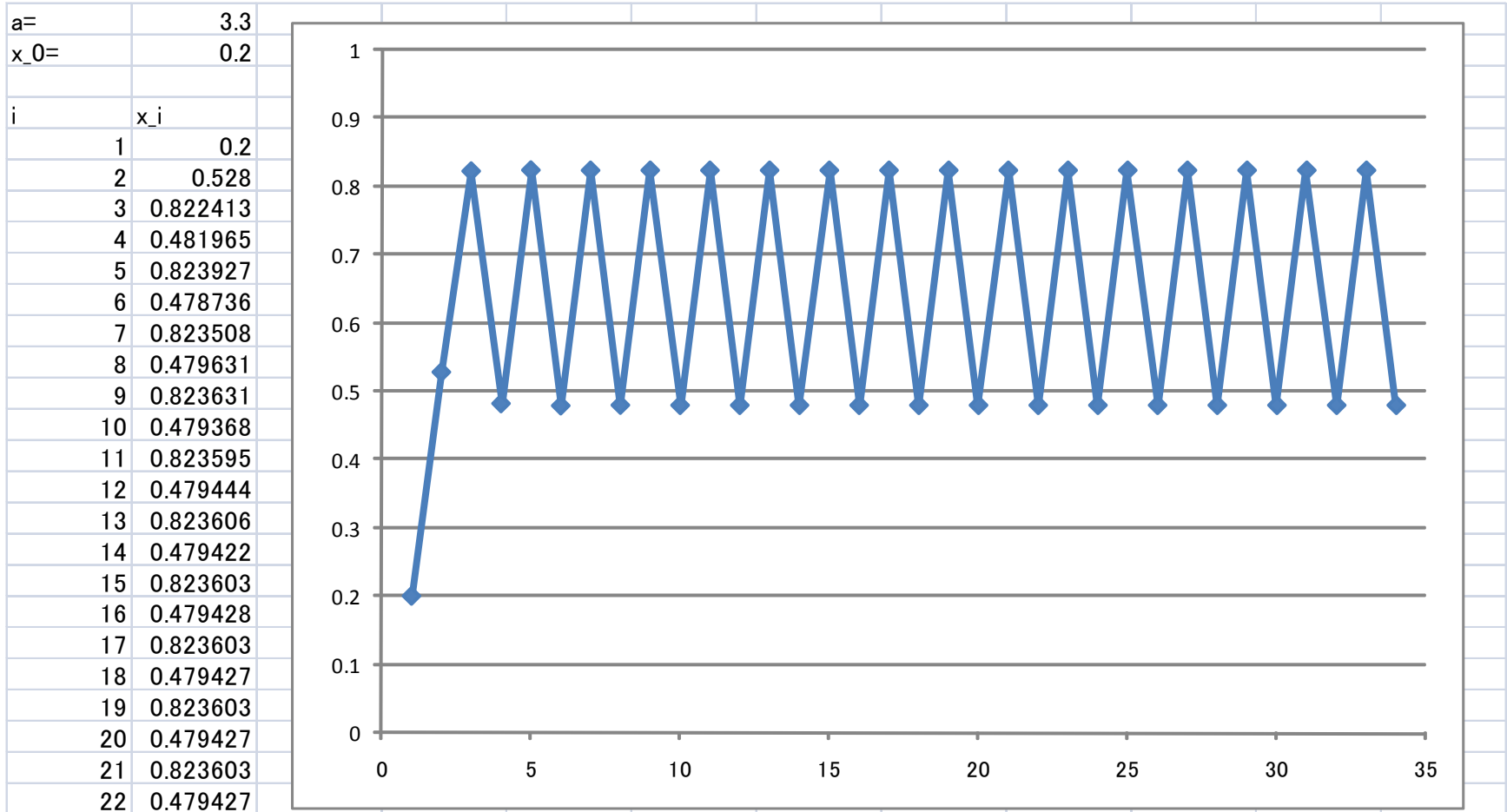
a=	2.6
x_0=	0.2
i	x_i
1	0.2
2	0.416
3	0.631654
4	0.604935
5	0.621371
6	0.6117
7	0.61756
8	0.614067
9	0.616171
10	0.614911
11	0.615668
12	0.615214
13	0.615487
14	0.615323
15	0.615421
16	0.615363
17	0.615398
18	0.615377
19	0.615389
20	0.615382
21	0.615386
22	0.615384



ロジスティック写像

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$$

$$a = 3.3$$

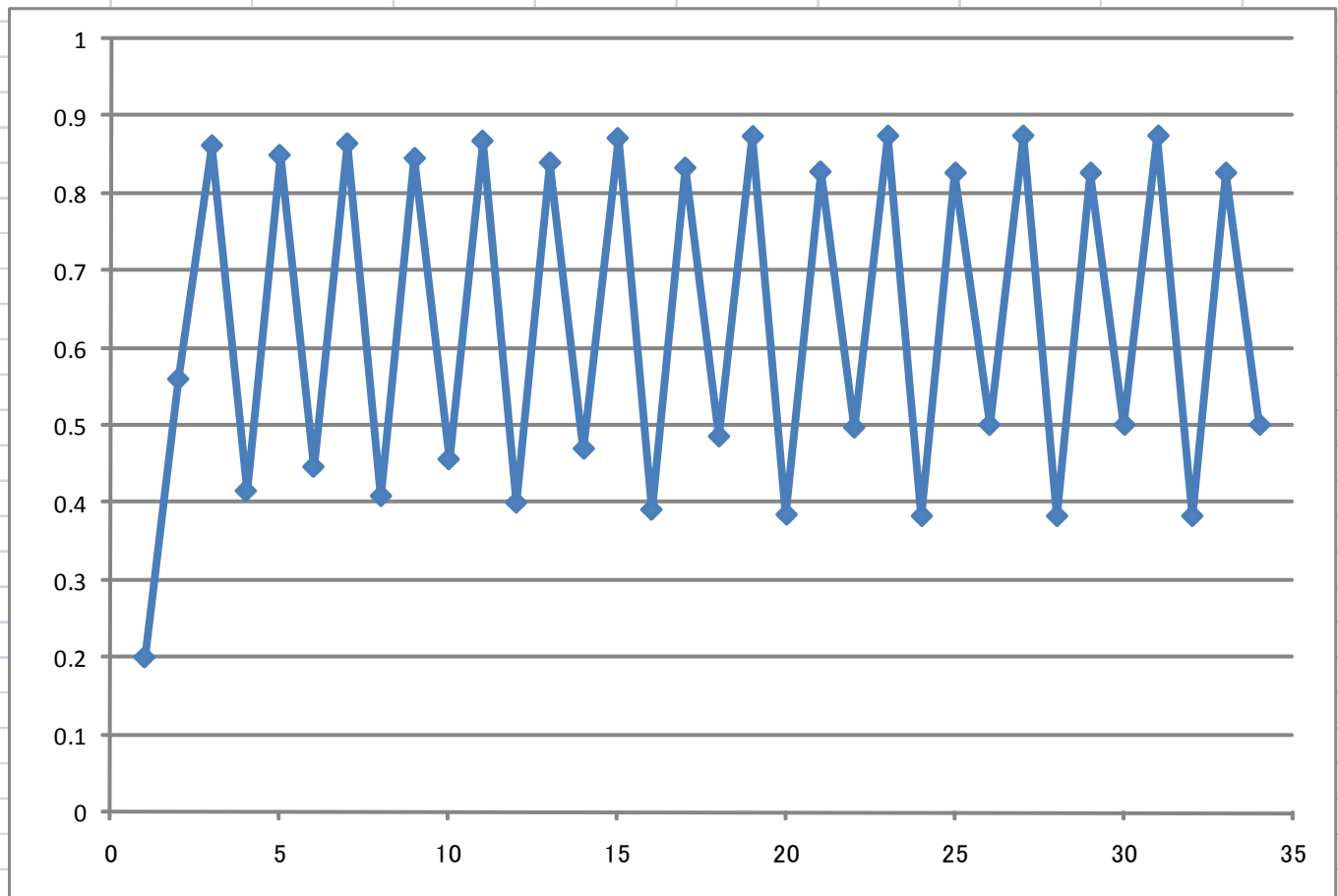


ロジスティック写像

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$$

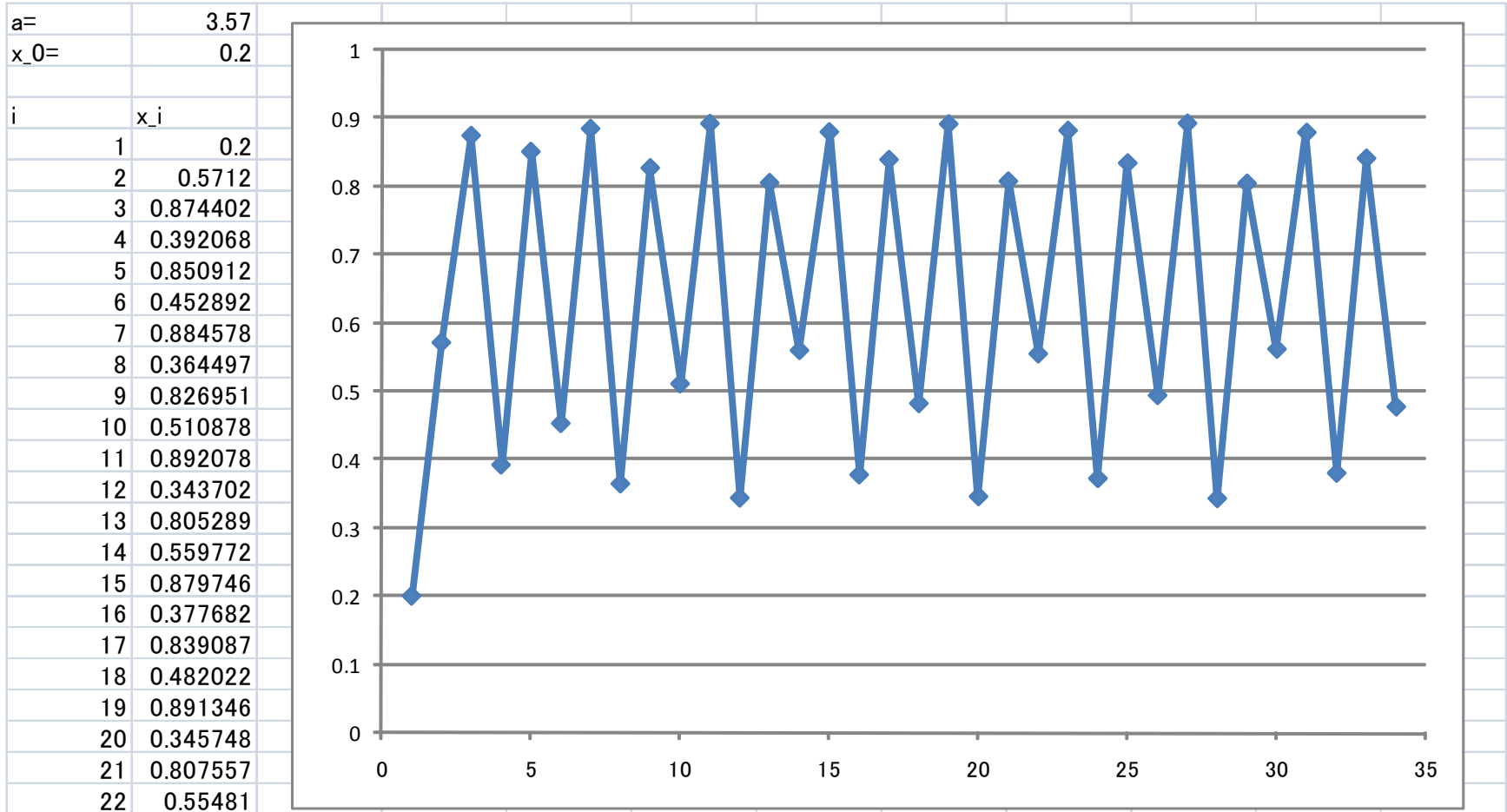
$$a = 3.5$$

a=	3.5
x_0=	0.2
i	x_i
1	0.2
2	0.56
3	0.8624
4	0.415332
5	0.84991
6	0.446472
7	0.864971
8	0.408785
9	0.84588
10	0.456285
11	0.868312
12	0.400213
13	0.840149
14	0.470046
15	0.87186
16	0.391022
17	0.833433
18	0.485879
19	0.874302
20	0.384643
21	0.828425
22	0.49748



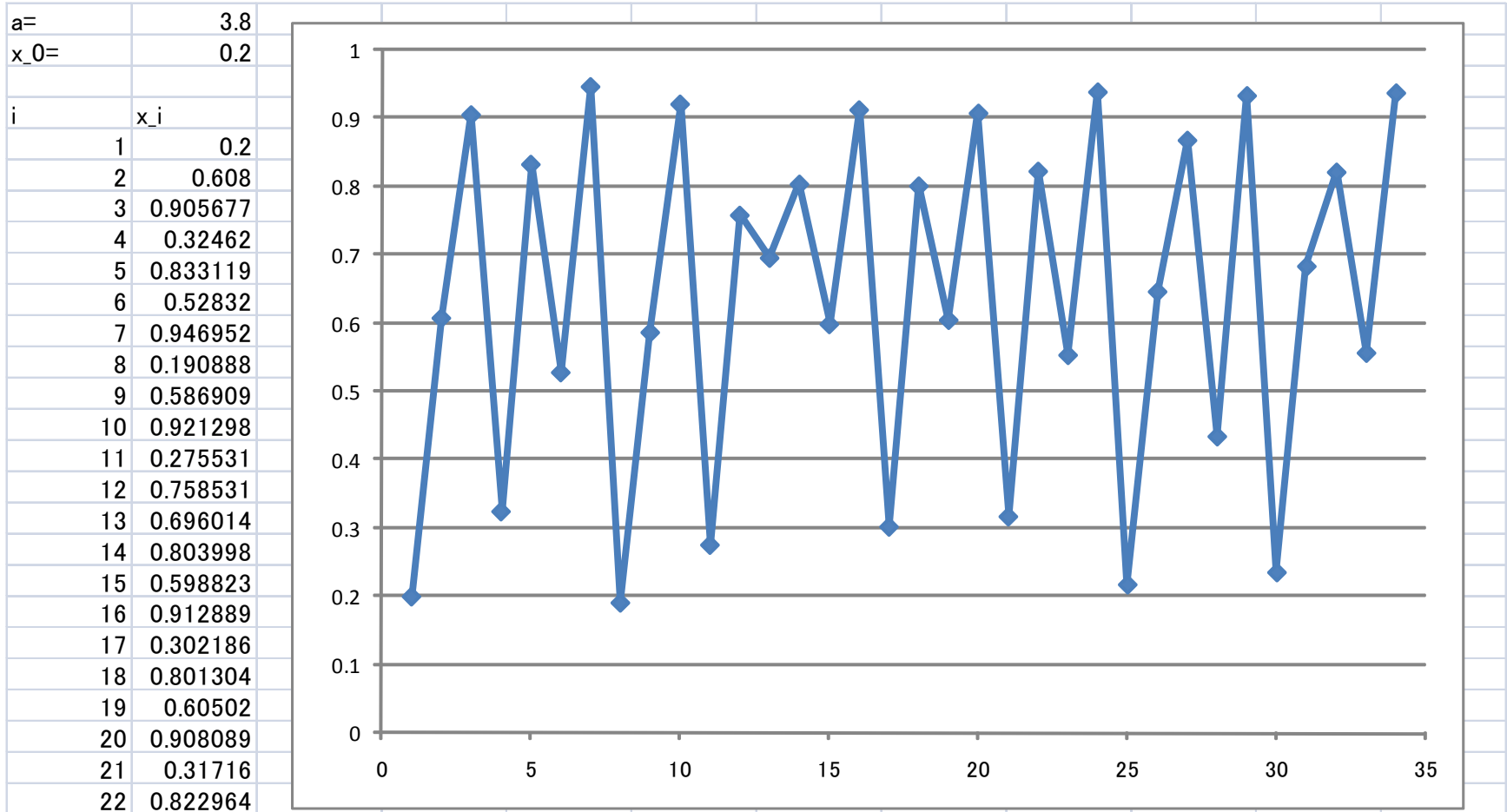
ロジスティック写像

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad a = 3.57$$



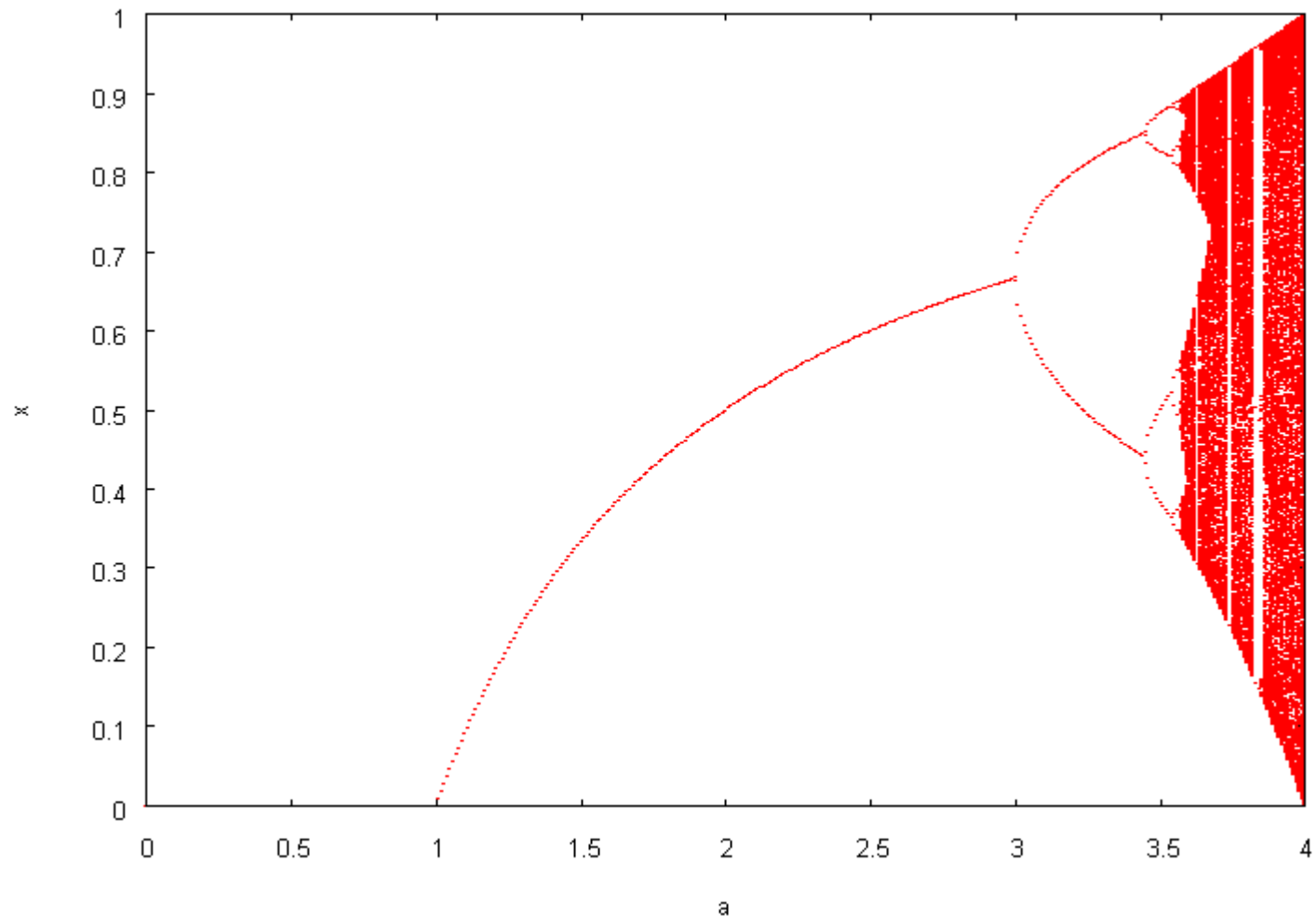
ロジスティック写像

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad a = 3.8$$

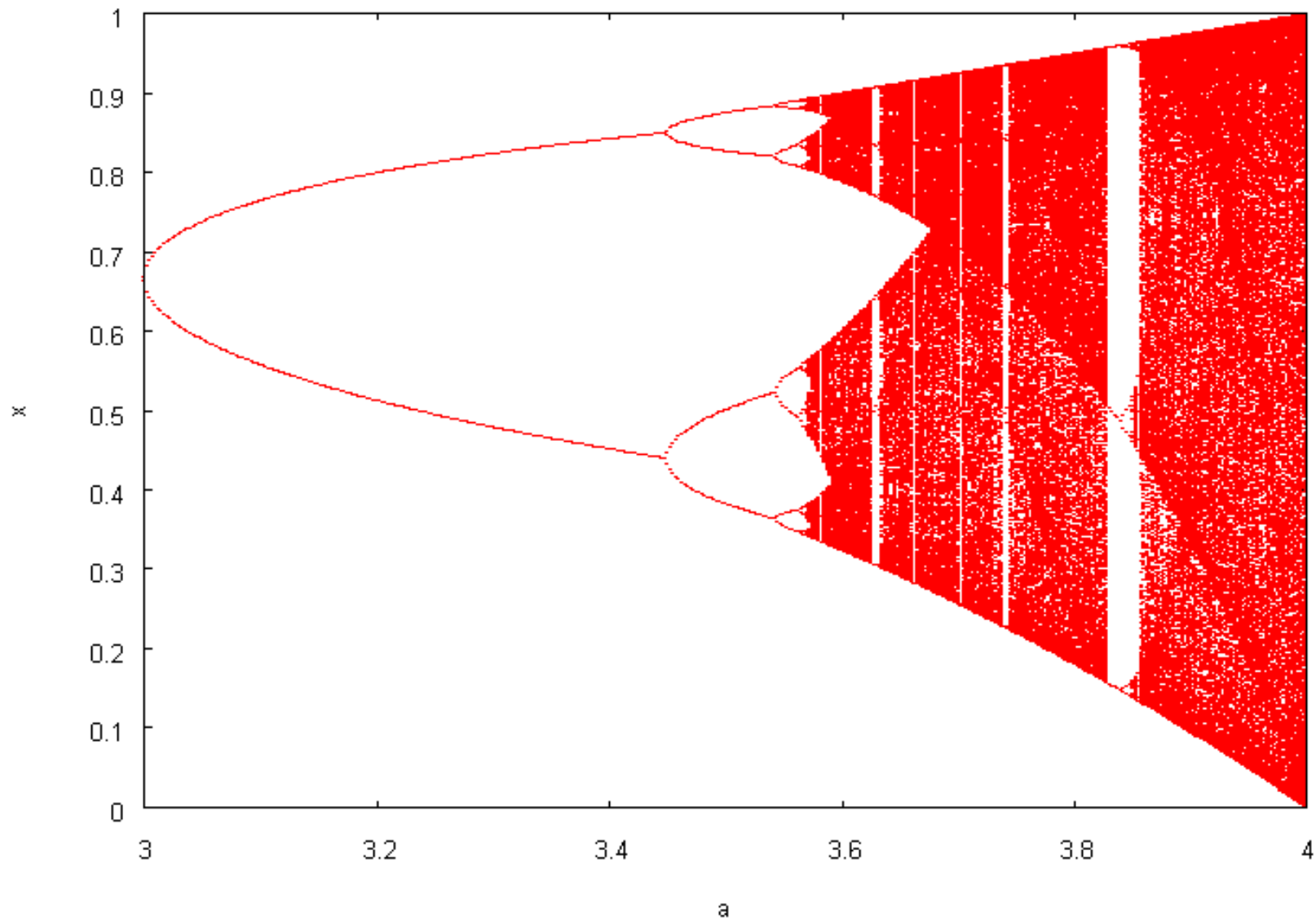


ロジスティック写像

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \text{ の収束点}$$



$3 < a < 4$ の拡大図



ローレンツカオス

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma(x-y)$$

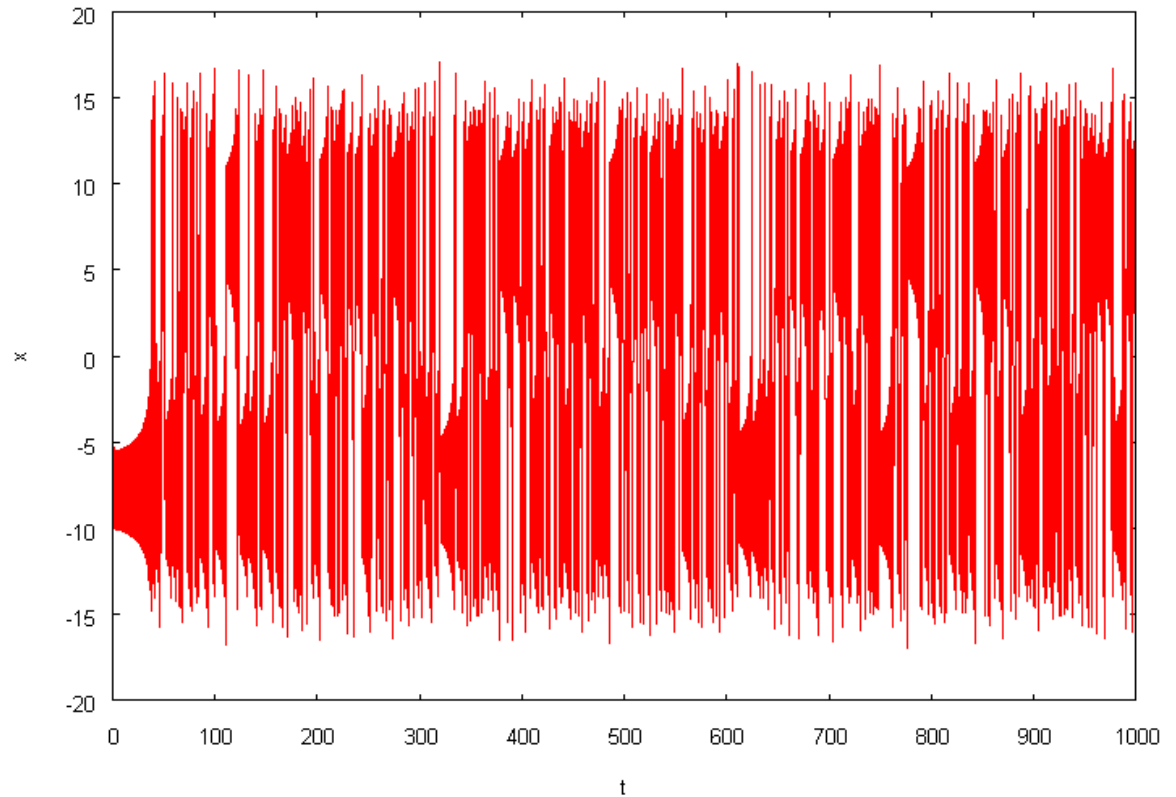
$$\frac{dy}{dt} = -y + xz + rx$$

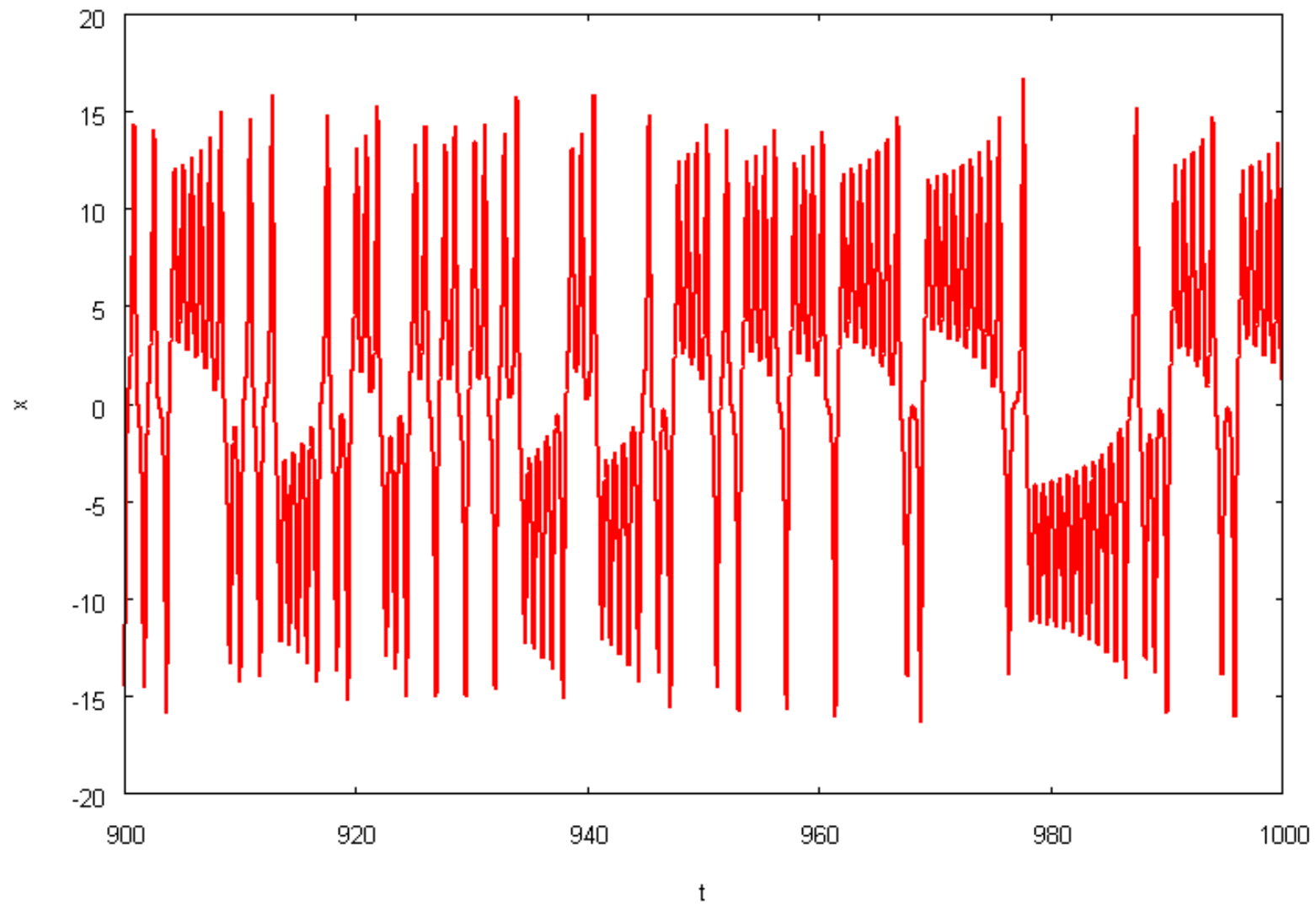
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

$$\sigma = 10$$

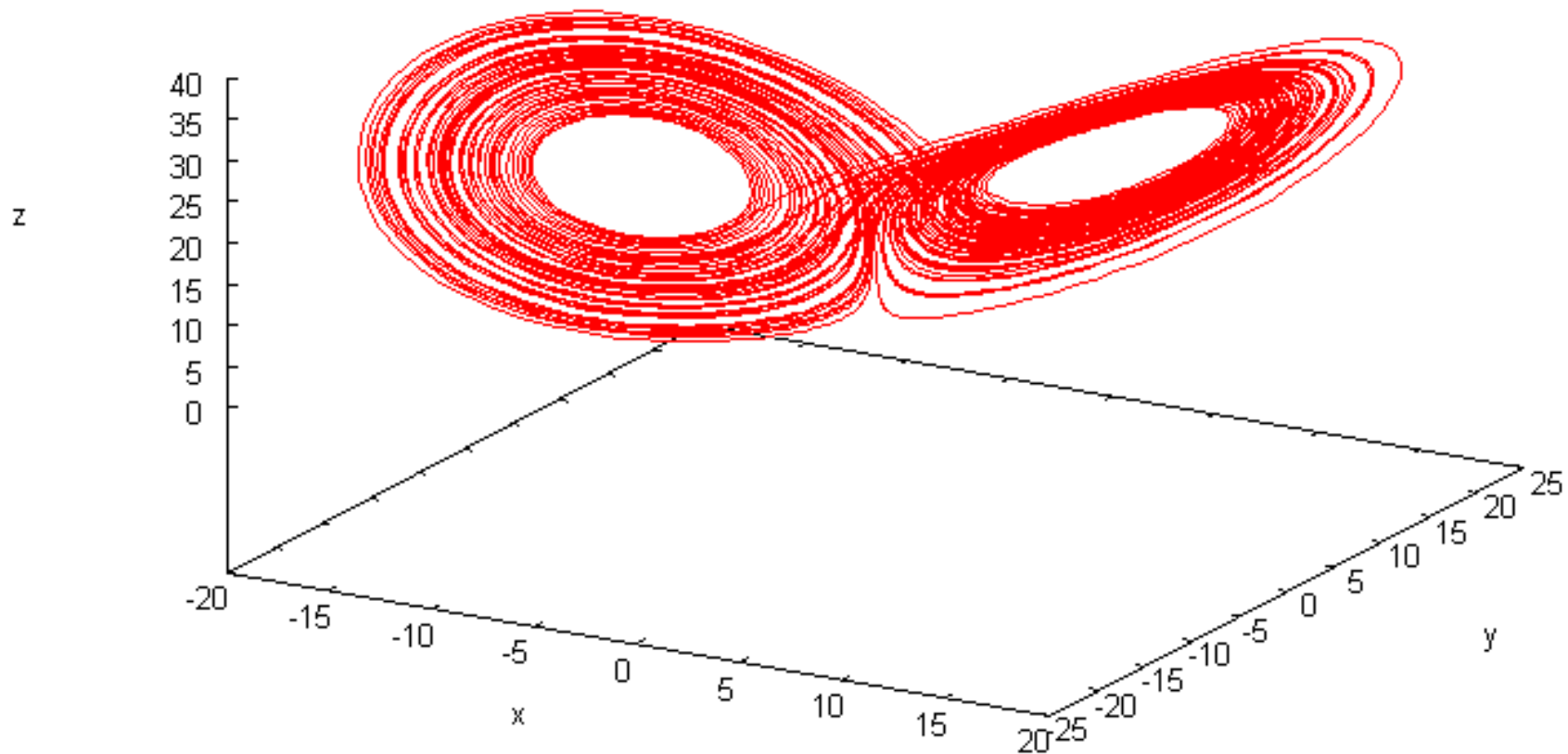
$$r = 24.17$$

$$b = \frac{8}{3}$$





相空間上では



(ストレンジアトラクター、ローレンツアトラクター)

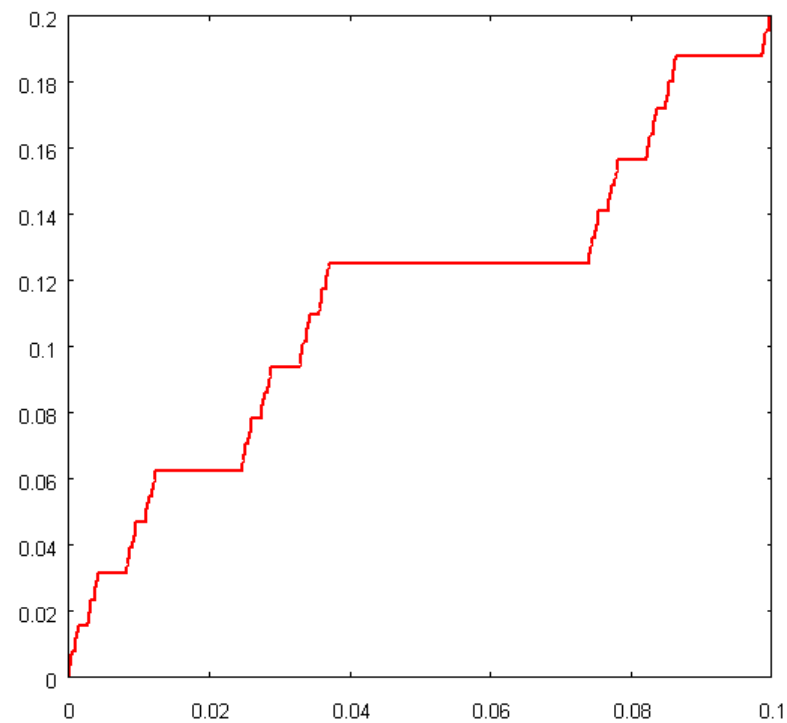
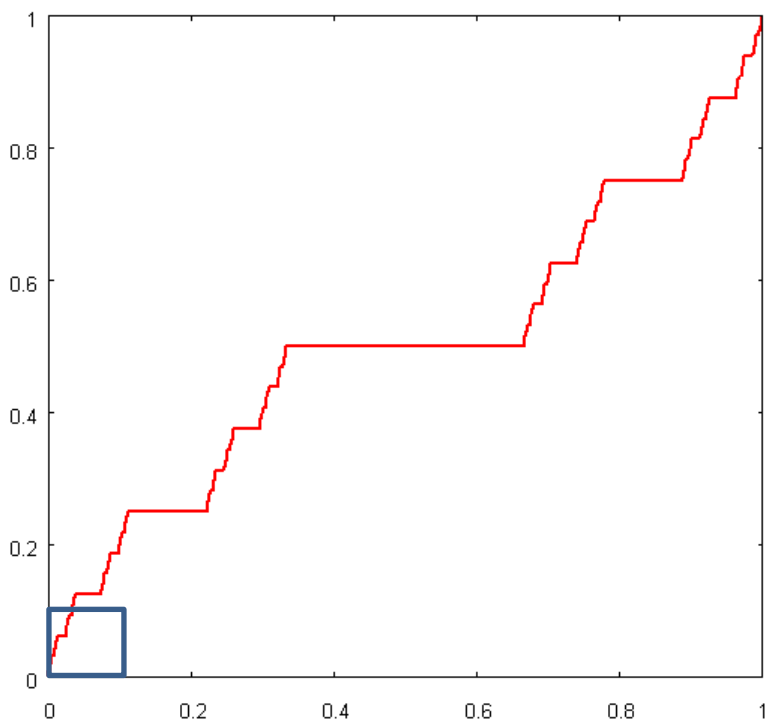
フラクタル

- ・ 自己相似な特徴を持つ図形

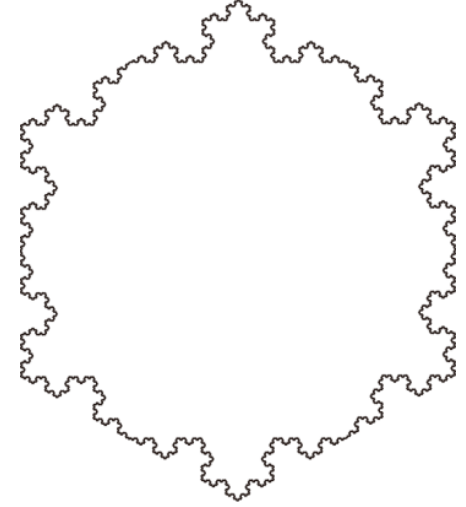
カントール集合 (Cantor set)



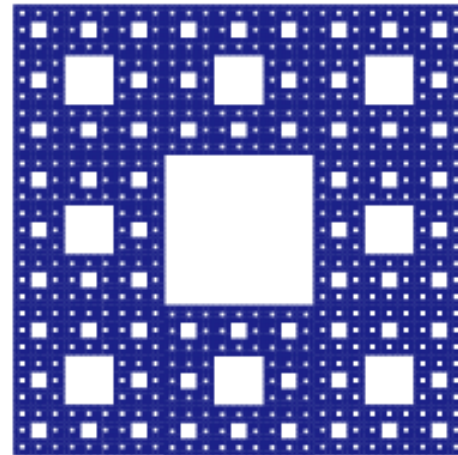
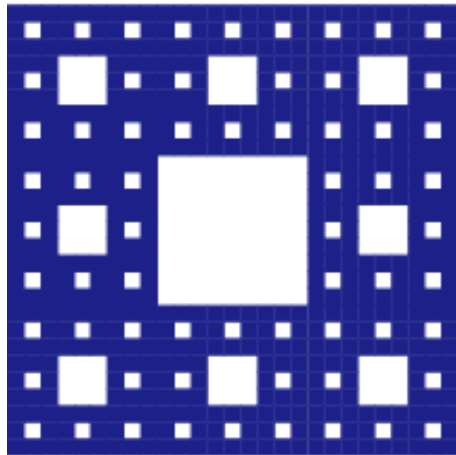
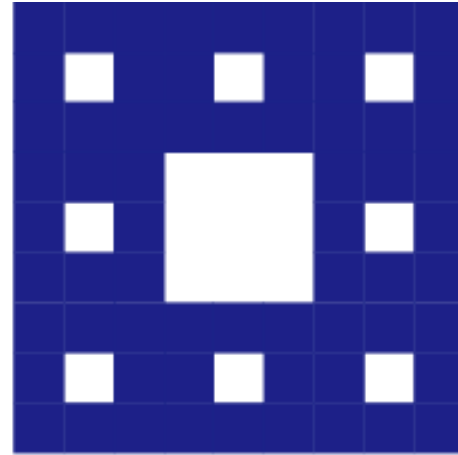
Devil's staircase (悪魔の階段)



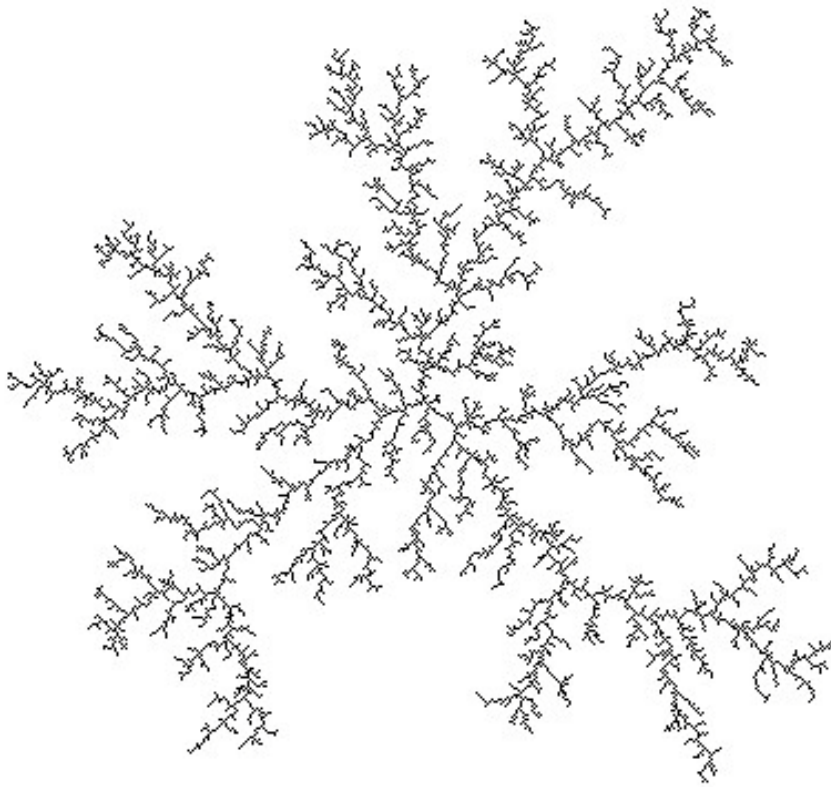
コッホ曲線 (Koch curve)



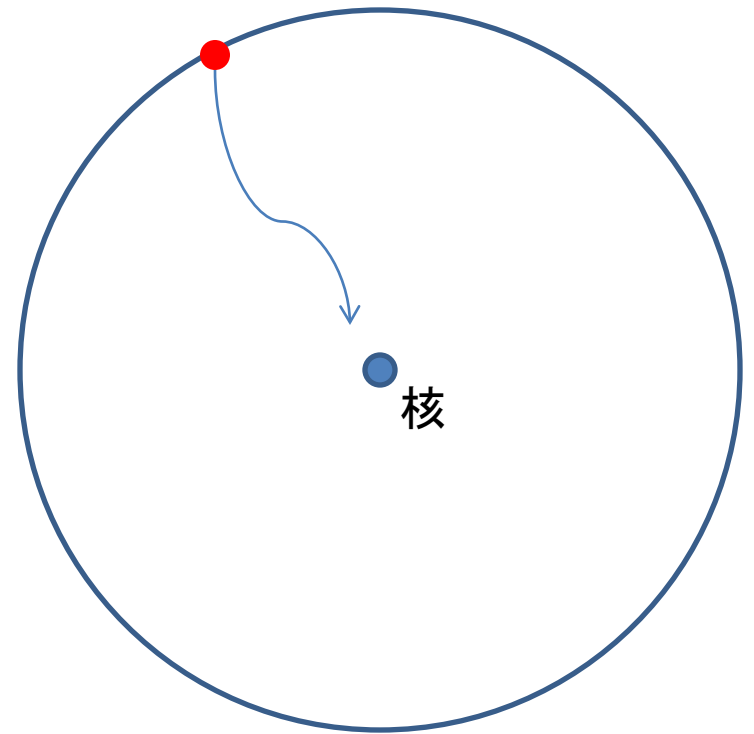
シェルピンスキーカーペット (Sierpinski carpet)



DLA (Diffusion Limited Aggregation: 拡散律速凝集) パターン



これもフラクタルであることが知られている
(統計的なフラクタル)



要素はBrown運動し、
核と接触したら固定される。

硫酸銅水溶液の電気分解により作られた"銅樹"

Wikipedia "Fractal"より

マンデルブロー集合 (Mandelbrot set)

マンデルブロー集合の図

Wikipedia "フラクタル"より

複素数の写像 $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$

が無限大に発散しない c の領域

マンデルブロー集合の図(動画)

Wikipedia "Mandelbrot set"より

生物(植物)にみられる
フラクタル構造

Wikipedia "Fractal"より

ブロッコリー(?)

自己相似のアルゴリズム
で作ったシダの葉

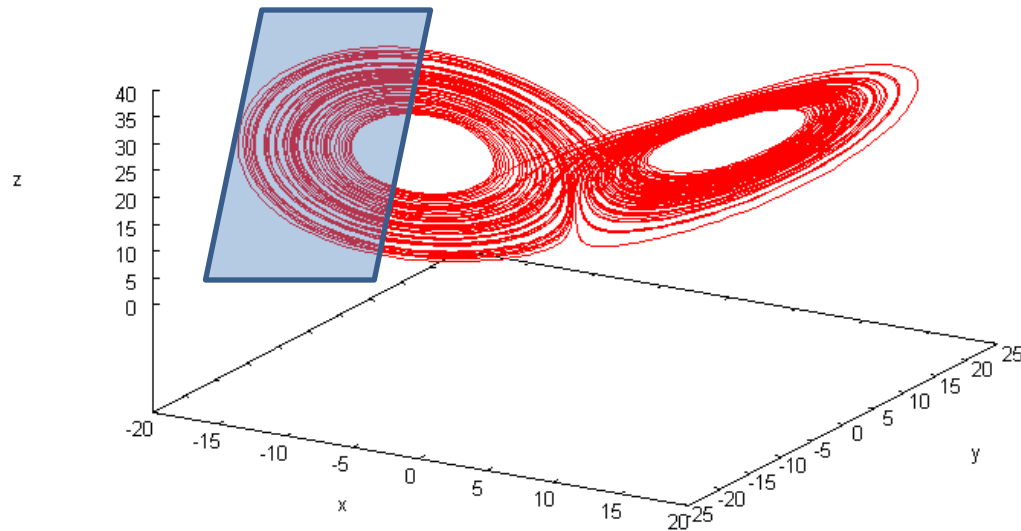
地形にみられるフラクタル(リアス式海岸)

google mapより

三陸海岸のあたり

カオスとフラクタル

適当な面で切った断面：ポアンカレ断面



ポアンカレ断面で見るとカオスを示すときには断面がフラクタル的になっていると言われている。