2010.2.1

# 物性物理学C 第2回レポート 略解

**I.** 以下のように固定点を求め、そのまわりに線形安定性解析を行う。

**(i)** 固定点を求めると $-x+x^3=0$ より $x=0,\ \pm1$。それぞれの固定点について安定性解析をする。
$x=0$ まわりで $x=0+\Delta x$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t} = -\Delta x + o\left(\Delta x^2\right)$$

よって、安定である。
$x=\pm1$ まわりで $x=\pm1+\Delta x$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t} = -\left(\pm1+\Delta x\right) + \left(\pm1+\Delta x\right)^3 = 2\Delta x + o\left(\Delta x^2\right)$$

よって、不安定である。

**(ii)** 固定点を求めると $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$ より $x=y=0$。
$x=0+\Delta x$、$y=0+\Delta y$ とおいて代入すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}$$

この固有値は $\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0$ の解。これは、$a>0$ のときには固有値の実部は 2 つとも正、$a<0$ のときには固有値の実部が 2 つとも負。よって、$a>0$ のときは不安定、$a<0$ のときは安定。

**(iii)** 固定点を求めると $-x^3=0$ より $x=0$。
$x=0+\Delta x$ とおいて代入すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x = -\Delta x^2$$

線形の部分 ($\Delta x$ の 1 次の部分) だけを考えると 0 なので中立安定のように思われるが、線形部分が 0 のときには、高次の項が重要となる。この場合は、$\Delta x^2$ の項が重要となる。常に、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x = -\Delta x^2 \leq 0$ であるので、$\Delta x > 0$ ならば 0 に収束していくが、$\Delta x < 0$ ならば負の無限大に発散していく。「安定」の定義は「どんな摂動に対しても固定点に収束する」ことであるが、この場合は、$\Delta x < 0$ の摂動を与えると発散するので、$x=0$ の固定点は不安定。

**II.** ロジスティック方程式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(a-x)$$

は変数分離することにより解くことができる。

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x'}{x'(a-x')} = \int_0^t \mathrm{d}t'$$

$$\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{x'} + \frac{1}{a-x'}\right)\mathrm{d}x' = \int_0^t \mathrm{d}t'$$

これを解くと、

$$[\ln|x| - \ln|a-x|] - [\ln|x_0| - \ln|a-x_0|] = at$$
$$\ln\left|\frac{x}{a-x}\right| - \ln\left|\frac{x_0}{a-x_0}\right| = at$$

これより、

$$\frac{x(a-x_0)}{x_0(a-x)} = \exp(at)$$
$$\frac{a-x_0}{x_0}x = (a-x)\exp(at)$$

となり、

$$x = \frac{a}{1+\frac{a-x_0}{x_0}\exp(-at)}$$

この式を見れば $t \to \infty$ のとき、常に $x \to a$ となると思われる。しかし、$x_0 < 0$ のときには、$\dfrac{a-x_0}{x_0} < -1$ となるため、$\exp(at) = -\dfrac{a-x_0}{x_0}$ となる点で分母が発散するため、有限の時間で $x \to -\infty$ に発散。一方、$x_0 > 0$ のときには、$\dfrac{a-x_0}{x_0} > -1$ のため、有限の時間で発散することはなく、$t \to \infty$ のとき、常に $x \to a$。

線形安定性解析をしてみると、固定点は $x = 0, a$。それぞれのまわりで安定性解析をする。

- $x = 0$ まわりで、$x = 0 + \Delta x$ とおくと、

  $$\frac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t} = a\Delta x + o\left(\Delta x^2\right)$$

  より不安定。

- $x = a$ まわりで、$x = a + \Delta x$ とおくと、

  $$\frac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t} = -a\Delta x + o\left(\Delta x^2\right)$$

  $a > 0$ より安定。

よって、極限をとったときの値が $a$ であることと矛盾しない。

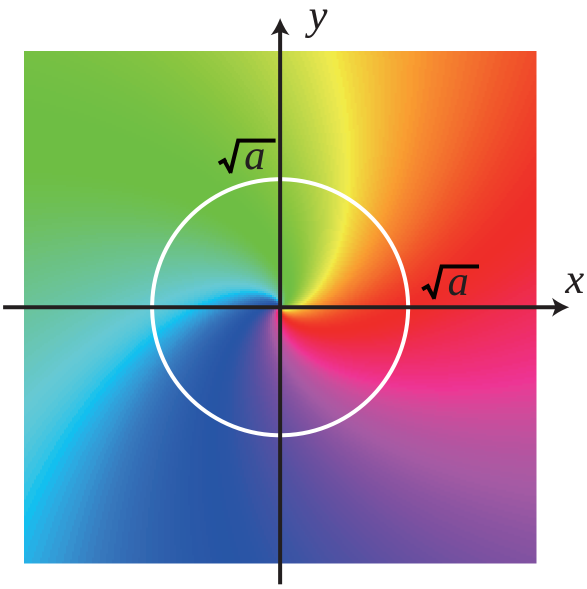
**III.** 極座標に変換する。$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$、$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta$、$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}$、$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$ を用いると、

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= \cos\theta\left[ax - \omega y - \left(x^2+y^2\right)(x-by)\right] \\
&\quad +\sin\theta\left[\omega x + ay - \left(x^2+y^2\right)(y+bx)\right] \\
&= ar - r^3 \\
\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\sin\theta}{r}\left[ax - \omega y - \left(x^2+y^2\right)(x-by)\right] \\
&\quad +\frac{\cos\theta}{r}\left[\omega x + ay - \left(x^2+y^2\right)(y+bx)\right] \\
&= \omega - br^2
\end{aligned}$$

$b=0$ のときは、位相の進み方 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ は $r$ に依存しないので、振幅に関係なく位相は中心からの角度だけで決まる。なので、原点を中心として、放射状の半直線となる。

一方で、$b>0$ のときには、半径によって、各速度が異なる。リミットサイクルは $r=\sqrt{a}$ の位置にあるが、それより外側だと角度の進み方が遅くなり、内側だと速くなる。このことを考慮すると、リミットサイクルの外側にあるとき、時間が十分にたったあと漸近するリミットサイクル上の点は、今考えている点よりも後方にある。またリミットサイクルの内側にあるときには、逆に前方にあることになる。このような点をつないでいくと、内から外に進むに従って、中心からの角度が大きくなるような曲線になると予想される。つまり $r=f(\theta)$ という形で書くならば、$f$ は $\theta$ の増加関数になる。

$b<0$ のときにはまったく逆の議論ができ、$\theta=f(r)$ という形で書くならば、$f$ は $\theta$ の減少関数になる。具体的には図のようになる (図は $b=0.5$ の場合)。




**IV.** $\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$ とおくと

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t}=-2K_1\sin(\Delta\theta)-2K_2\sin(2\Delta\theta)$$

よって、

$$f(\theta)=-K_1\sin(\Delta\theta)-K_2\sin(2\Delta\theta)$$

の形によって条件が変わる。つまり、この関数が 0 となる点とそのときの傾きが重要である。

$$f(\theta)=-\sin(\Delta\theta)\left[K_1+2K_2\cos(\Delta\theta)\right]$$

と変形できるので、$\Delta\theta=0,\pi$ は必ず $f(\theta)=0$ を満たす。$K_1$ と $K_2$ の条件により、以下のように場合分けできる。

- $2|K_2|<K_1$ のときには、他に $f(\theta)=0$ となる点はない。グラフの傾きを考えると、$\theta=0$ が安定となる。
- $2|K_2|>K_1$ のときには、$K_1+2K_2\cos(\Delta\theta)=0$ を満たすような $\theta$ が $\theta=0,\pi$ 以外に存在する。この点を $\theta=\alpha,\beta$ とおく。三角関数の性質を考えると、$0<\alpha<\pi<\beta<2\pi$ となる。$f(\theta)=0$ となる点での傾きを考えると、

– $K_2 > K_1/2$ のときには、$\theta = 0, \pi$ が安定、$\theta = \alpha, \beta$ が不安定。
– $K_2 < -K_1/2$ のときには、$\theta = 0, \pi$ が不安定、$\theta = \alpha, \beta$ が安定。

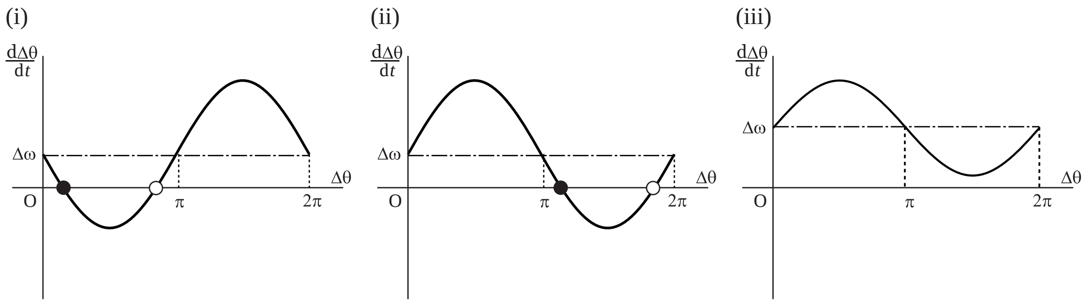
**V.** $\Delta\theta = \theta - \Omega t$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}(\Omega t + \Delta\theta)}{\mathrm{d}t} = \omega + K \sin\left(\Omega t - (\Omega t + \Delta\theta)\right)$$

変形すると

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} = \omega - \Omega - K \sin(\Delta\theta)$$

$\Delta\omega = \omega - \Omega$ とおいて、$|K|$ と $|\Delta\omega|$ の大小、$K$ の符号により場合分けできる（下図参照）。




これにより、

**(i)** $|\Delta\omega| < |K|$ かつ $K > 0$ のとき：同相近くで同期

**(ii)** $|\Delta\omega| < |K|$ かつ $K < 0$ のとき：逆相近くで同期

**(iii)** $|\Delta\omega| > |K|$ のとき：同期しない

**VI. VII.** 略

講義のシラバス・資料など： http://cu.phys.s.chiba-u.ac.jp/lecture/busseiC/
北畑の連絡先：kitahata@physics.s.chiba-u.ac.jp, TEL:043-290-3723