

物性物理学C 第1回レポート

提出期限: 2010年11月30日(火) 14:30

提出先: 理学部2号館402号室(北畑) 又は講義開始時に提出

以下の問題から3題以上を選んで解答しなさい。

I. n 個の互いに区別できない粒子を N 個の箱の中に入れる状況を考える。ただし1つの箱の中には1つまでしか粒子を入れることができないとする。

(a) このときの状態数 W を求めなさい。

(b) $n = Nc$ ($0 < c < 1$) として、エントロピーを N と c 、および、ボルツマン定数 k_B のみで表しなさい。ただし、Stirling の公式、つまり m が十分に大きいときには

$$\ln m! = m \ln m - m$$

を用いること。また、 S が正であることを示しなさい。

(c) c を固定したまま、 N を α 倍したときに、エントロピーはどうなるか?

(d) c が1より十分小さいとして、(b) で得られた答えを展開し、 $S = -k_B N(c \ln c - c)$ となることを示しなさい。

(e) (d) の結果から $n = Nc$ を用いて S を k_B 、 n 、 N のみで表しなさい。 n を固定して、 N を β 倍したとき、 S はどうなるか?

II. 1次元ランダムウォークにおいて、左右のサイトに移動する確率が異なる場合を考える。

$$x_{i+1} = x_i + \xi_i$$

ただし、

$$\xi_i = \begin{cases} 0 & (\text{確率 } 1-p-q) \\ 1 & (\text{確率 } p) \\ -1 & (\text{確率 } q) \end{cases}$$

ただし、 $0 < p < 1$ 、 $0 < q < 1$ 、 $p + q < 1$ とする。このときの確率の分布の平均 $\langle x_n \rangle$ 、分散 $\langle (x_n - \langle x_n \rangle)^2 \rangle$ を計算しなさい。

III. 1次元系での拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を考える。 $t = 0$ での u のプロファイルが

$$u(x, t = 0) = A \exp\left(-\frac{x^2}{\xi^2}\right)$$

のとき、 u の時間発展 $u(x, t)$ を求めなさい。ただし、講義中に求めた Green 関数を用いてよい。

IV. 熱拡散方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T$$

を考える。ただし、 D_T は熱拡散定数である。局所的には平衡だと考えることができ、 T を時刻 t と位置 r の関数とできる。この系が高温の熱源と低温の熱源に接しているとき、系は定常状態になりうる。この定常解を 1 次元と 2 次元（軸対称）、3 次元（点对称）の場合について求めなさい。ただし、境界条件として、

- (a) 1 次元の場合は、温度を座標 x の関数 $T(x)$ として、 $T(x_1) = T_1$, $T(x_2) = T_2$ とする。
- (b) 2 次元の場合は極座標を考え、温度を動径 r の関数 $T(r)$ として、 $T(r_1) = T_1$, $T(r_2) = T_2$ とする。
- (c) 3 次元の場合は極座標を考え、濃度を動径 r の関数 $T(r)$ として、 $T(r_1) = T_1$, $T(r_2) = T_2$ とする。

V. ランジュバン方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\gamma \frac{dx}{dt} + \xi(t)$$

において、粒子の質量が十分に小さいときには、左辺を無視することにより、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\gamma} \xi(t)$$

となる。この方程式に関して、 $\langle x(t) \rangle$ 、 $\langle v(t) \rangle$ 、 $\langle x(t_1)x(t_2) \rangle$ 、 $\langle v(t_1)v(t_2) \rangle$ 、 $\langle (x(t) - x(0))^2 \rangle$ をそれぞれ求めなさい。ただし、ノイズ $\xi(t)$ は時間相関がないとする。すなわち、

$$\langle \xi(t) \rangle = 0$$

$$\langle \xi(t)\xi(s) \rangle = 2M\delta(t-s)$$

である。

VI. 次にあげる内容のうち一つを選び、計算機を用いて数値計算を行った結果を示しなさい。ただし、どのようにプログラムを作ったかのアルゴリズムについても簡単に記述すること。

- (a) ランダムウォーク
- (b) ランジュバン方程式
- (c) 拡散方程式

VII. 次にあげるキーワードのうち一つを選んで、教科書などを調べ、その内容をできるだけ詳しく説明しなさい。

- (a) ボルツマン (Boltzmann) 方程式
- (b) フォッカー・プランク (Fokker-Planck) 方程式

講義に対する感想、要望などあれば書いてください（成績には反映されません）

講義のシラバス・資料など：<http://cu.phys.s.chiba-u.ac.jp/lecture/busseiC/>

北畑の連絡先：kitahata@physics.s.chiba-u.ac.jp, TEL:043-290-3723