2010.12.7

物性物理学C 第1回レポート 略解

I.

(a) 状態数は N 個の中から n 個を選ぶ場合の数なので

$$W = {}_N\mathrm{C}_n = \frac{N!}{(N-n)!n!}$$

(b) $n = Nc$ とし、Sterling の公式を使うと

$$\begin{aligned} S &= k_\mathrm{B} \ln \frac{N!}{(N-Nc)!(Nc)!} \\ &= k_\mathrm{B} \left[N\ln N - N - N(1-c)\ln(N(1-c)) + N(1-c) - Nc\ln(Nc) + Nc \right] \\ &= -k_\mathrm{B} N \left[c\ln c + (1-c)\ln(1-c) \right] \end{aligned}$$

(c) (b) の解を見ると、c を一定にしたとき、S は N に比例する。よって、N を α 倍すると、S も α 倍になる。これは、エントロピーの示量性を表している。

(d) (b) の答えより、

$$S = -k_\mathrm{B} N \left[c\ln c + (1-c)(-c) \right] = -k_\mathrm{B} N \left[c\ln c - c + o(c^2) \right] \tag{1}$$

(e) (d) に $n = Nc$ を用いて c を消すと

$$S = -k_\mathrm{B} N \left[\frac{n}{N}(\ln n - \ln N) - \frac{n}{N} \right] = -k_\mathrm{B} n \left[\ln n - \ln N - 1 \right] \tag{2}$$

N を βN にすると、

$$S = -k_\mathrm{B} n \left[\ln n - \ln N - \ln\beta - 1 \right] \tag{3}$$

となるので、エントロピーが $nk_\mathrm{B}\ln\beta$ だけ増加することが分かる。N を体積だと考えると、理想気体の場合と等しい。

II. $x_0 = 0$ とすると講義中に示したのと同様にして

$$\langle x_n \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \right\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \langle \xi_i \rangle$$

$$\left\langle x_n^2 \right\rangle = \left\langle \left(\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \right)^2 \right\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \xi_i \xi_j \right\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \langle \xi_i \xi_j \rangle$$

本問題の条件下で、$\langle \xi_i \rangle$、$\langle \xi_i \xi_j \rangle$ を求めると

$$\langle \xi_i \rangle = 1 \times p + (-1) \times q + 0 \times (1-p-q) = p - q$$

$$\langle \xi_i \xi_j \rangle = \begin{cases} 1 \times 1 \times p + (-1) \times (-1) \times q = p + q & \text{if} \quad i = j \\ 1 \times 1 \times p^2 + 1 \times (-1) \times 2pq + (-1) \times (-1) \times q^2 = (p-q)^2 & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}$$

これより、

$$\langle x_n \rangle = (p-q)n$$

$$\left\langle (x_n - \langle x_n \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle x_n^2 \right\rangle - \langle x_n \rangle^2 = (p-q)^2 n(n-1) + (p+q)n - (p-q)^2 n^2 = n\left[p + q - (p-q)^2 \right]$$

III. 1次元系での拡散方程式の Green 関数 $G(x,t)$(形は講義中に示した。) を用いて解く。

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int \mathrm{d}x' G(x-x',t)u(x',t=0) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4Dt}\right) A \exp\left(-\frac{x'^2}{\xi^2}\right) \mathrm{d}x' \\
&= \frac{A}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{1}{4Dt}+\frac{1}{\xi^2}\right)\left(x'-\frac{\xi^2}{4Dt+\xi^2}x\right)^2 + \left(\frac{\xi^2}{4Dt(4Dt+\xi^2)}-\frac{1}{4Dt}\right)x^2\right] \mathrm{d}x' \\
&= \frac{A\xi}{\sqrt{4Dt+\xi^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt+\xi^2}\right)
\end{aligned}
$$

IV.

(a) 定常状態での1次元の熱拡散方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

となり、一般解は

$$T(x) = ax + b$$

境界条件と合う解は

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

となる。

(b) 2次元極座標で考える。2次元極座標でのラプラシアンは

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

と表せることから、円対称な定常解を仮定すると熱拡散方程式は

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}T\right) = 0$$

となり、一般解は

$$T(r) = a\ln r + b$$

境界条件と合う解は

$$T(r) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ln r_2 - \ln r_1}(\ln r - \ln r_1)$$

となる。

(c) 3次元極座標で考える。3次元極座標でのラプラシアンは

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

と表せることから、円対称な定常解を仮定すると熱拡散方程式は

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}T\right) = 0$$

となり、一般解は

$$T(r) = \frac{a}{r} + b$$

境界条件と合う解は

$$T(r) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1) r_1 r_2}{r_1 - r_2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1})$$

となる。

V. 粒子の質量が十分に小さいとき (粘性極限) のランジュバン方程式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\gamma}\xi(t)$$

から

$$\langle v(t) \rangle = \frac{1}{\gamma}\langle \xi(t) \rangle = 0$$

$$\langle v(t_1) v(t_2) \rangle = \frac{1}{\gamma^2}\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = \frac{2M}{\gamma^2}\delta(t_1 - t_2)$$

は自明。

$$x = x(0) + \frac{1}{\gamma}\int_0^t \xi(t)\mathrm{d}t$$

これより、

$$\langle x(t) \rangle = x(0) + \frac{1}{\gamma}\int_0^t \langle \xi(t') \rangle \mathrm{d}t' = x(0)$$

$$\begin{aligned}
\langle x(t_1) x(t_2) \rangle &= \left\langle \left(x(0) + \frac{1}{\gamma}\int_0^{t_1} \xi(t')\mathrm{d}t' \right) \left(x(0) + \frac{1}{\gamma}\int_0^{t_2} \xi(t'')\mathrm{d}t'' \right) \right\rangle \\
&= x(0)^2 + \frac{1}{\gamma^2}\int_0^{t_1} \mathrm{d}t' \int_0^{t_2} \mathrm{d}t'' \langle \xi(t')\xi(t'') \rangle \\
&= x(0)^2 + \frac{1}{\gamma^2}\int_0^{t_1} \mathrm{d}t' \int_0^{t_2} \mathrm{d}t'' 2M\delta(t' - t'') \\
&= x(0)^2 + \frac{2M}{\gamma^2}\int_0^{\min(t_1, t_2)} \mathrm{d}t' \\
&= x(0)^2 + \frac{2M}{\gamma^2}\min(t_1, t_2)
\end{aligned}$$

これを使うと

$$\begin{aligned}
\left\langle (x(t) - x(0))^2 \right\rangle &= \left\langle x(t)^2 \right\rangle - 2x(0)\langle x(t) \rangle + x(0)^2 \\
&= x(0)^2 + \frac{2M}{\gamma^2}t - x(0)^2 \\
&= \frac{2M}{\gamma^2}t
\end{aligned}$$

となる。

VI. VII. 略

講義のシラバス・資料など： http://cu.phys.s.chiba-u.ac.jp/lecture/busseiC/

北畑の連絡先：kitahata@physics.s.chiba-u.ac.jp, TEL:043-290-3723