

物性物理学C 第2回レポート

提出期限: 2010年2月8日(火)17:00まで

提出先: 理学部2号館402号室(北畑)

以下の問題から3題以上を選んで解答しなさい。

I. 次の力学系の固定点をすべて求め、それぞれの安定性を調べなさい。

(i) $\frac{dx}{dt} = 4x - x^3$

(ii) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -a(y^2 - 1)y - x \end{cases}$ (a で場合分けすること)

(iii) $\frac{dx}{dt} = 1 - \cos x$

(これは講義中扱わなかったものです。考えてみてください。周期関数なので $x = 0$ の固定点のみについて議論すればよいです。)

II. ロジスティック方程式

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x)$$

は解析的に解くことができる。ただし、 $t = 0$ で $x = x_0 (x_0 > 0)$ であるとする。

(i) この方程式を解析的に解き、 $t \rightarrow \infty$ の極限での値を求めなさい。

(ii) この方程式の固定点を求め、 $y = x(1 - x)$ のグラフの正負を考えることにより長時間の挙動を議論し、厳密解と比べなさい。

(iii) (ii) と同様の議論をすることにより、十分時間がたったときにどうなるかを議論しなさい。ただし、初期値 x_0 は $x_0 > 0$ の範囲にあるとする。

$$\frac{dx}{dt} = -x \ln x$$

III. Stuart-Landau 方程式を複素数で書くと、

$$\frac{dz}{dt} = (a + i\omega)z - (1 + ib)|z|^2 z$$

と書ける。 $z = x + iy$ において、実部と虚部に分解した式を書きなさい。また、

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

を用いて、平面極座標 r, θ での方程式として表しなさい。($r = |z|, \theta = \arg(z)$ と考えて、複素数表示から導いてもよい。)

IV. 位相記述された 2 つの振動子が下の式のような相互作用をしている。

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_1}{dt} &= \omega + K \sin(\theta_2 - \theta_1 + \alpha) \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= \omega + K \sin(\theta_1 - \theta_2 + \alpha)\end{aligned}$$

どのような引き込み現象が見られると予想されるか？ ただし、 $K > 0$ であるとする。

V. 次の写像力学系の固定点を求め、安定性を議論しなさい。

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad a_{n+1} &= 3a_n - a_n^3 \\ \text{(ii)} \quad a_{n+1} &= \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \quad (\text{これは少し難しいかもしれません。})\end{aligned}$$

VI. 次にあげる内容のうち一つを選んで数値計算を行いなさい。その結果をわかりやすく示しなさい。

- (a) 周期が異なるリミットサイクル振動子の同期現象
- (b) ロジスティック写像によるカオス

VII. 次にあげるキーワードのうち一つを選び、その内容をできるだけ詳しく説明しなさい。

- (a) アーノルドの舌 (Arnold's tongue)
- (b) ストレンジアトラクター (Strange attractor)
- (c) ホップ分岐

講義に対する感想、要望などあれば書いてください (成績には反映されません)

レポートは 2 月 14 日頃、2 号館 402 号室のポストに入れておきますので取りに来てください。また、成績に関する問い合わせの掲示をする可能性があるため、2 月 10 日 (木) ~ 2 月 14 日 (月) の間に必ず理学部 1 号館 122 号室前の掲示板を確認してください。なお、個人名、学籍番号を掲示されたくない人は、レポート提出時にその旨連絡してください。また、その際は必ずこちらから連絡がとれる連絡先 (メールアドレスなど) も合わせて連絡してください。

講義のシラバス・資料など : <http://cu.phys.s.chiba-u.ac.jp/lecture/busseiC/>

北畑の連絡先 : [kitahata@physics.s.chiba-u.ac.jp](mailto:kurahata@physics.s.chiba-u.ac.jp), TEL:043-290-3723