2011.2.10

物性物理学C 第2回レポート 略解

I. 以下のように固定点を求め、そのまわりに線形安定性解析を行う。

(i) 固定点を求めると $4x - x^3 = 0$ より $x = 0, \pm 2$。それぞれの固定点について安定性解析をする。
$x = 0$ まわりで $x = 0 + \Delta x$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t} = 4\Delta x + o\left(\Delta x^2\right)$$

よって、不安定である。
$x = \pm 2$ まわりで $x = \pm 2 + \Delta x$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t} = 4\left(\pm 2 + \Delta x\right) - \left(\pm 2 + \Delta x\right)^3 = -8\Delta x + o\left(\Delta x^2\right)$$

よって、安定である。

(ii) 固定点を求めると $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$ より $x = y = 0$。
$x = 0 + \Delta x$、$y = 0 + \Delta y$ とおいて代入すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

この固有値は $\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0$ の解。これは、$a > 0$ のときには固有値の実部は 2 つとも正、$a < 0$ のときには固有値の実部が 2 つとも負。よって、$a > 0$ のときは不安定、$a < 0$ のときは安定。

(iii) $x = 0$ の固定点について考える。
$x = 0 + \Delta x$ とおいて代入し、展開すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x = 1 - \left(1 - \frac{\Delta x^2}{2} + o\left(\Delta x^4\right)\right) = \frac{\Delta x^2}{2} + o\left(\Delta x^4\right)$$

線形の部分 (Δx の 1 次の部分) だけを考えると 0 なので中立安定のように思われるが、線形部分が 0 のときには、高次の項が重要となる。この場合は、Δx^2 の項が重要となる。常に、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x \geq 0$ であるので、$\Delta x < 0$ ならば 0 に収束していくが、$\Delta x > 0$ ならば無限大に発散していく。「安定」の定義は「どんな摂動に対しても固定点に収束する」ことであるが、この場合は、$\Delta x > 0$ の摂動を与えると発散するので、$x = 0$ の固定点は不安定。

II. (i) ロジスティック方程式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(1 - x)$$

は変数分離することにより解くことができる。

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x'}{x'(1 - x')} = \int_0^t \mathrm{d}t'$$

$$\int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{x'} + \frac{1}{1 - x'}\right)\mathrm{d}x' = \int_0^t \mathrm{d}t'$$

これを解くと、

$$[\ln|x| - \ln|1-x|] - [\ln|x_0| - \ln|1-x_0|] = t$$
$$\ln\left|\frac{x}{1-x}\right| - \ln\left|\frac{x_0}{1-x_0}\right| = t$$

これより、

$$\frac{x(1-x_0)}{x_0(1-x)} = \exp(t)$$
$$\frac{1-x_0}{x_0}x = (1-x)\exp(t)$$

となり、

$$x = \frac{1}{1+\frac{1-x_0}{x_0}\exp(-t)} = \frac{x_0}{1+(1-x_0)\exp(-t)}$$

$x_0 > 0$ の条件があるので、常に x は 1 に収束する。

(ii) 固定点は $x = 0, 1$。$y = x(1-x)$ のグラフを考えると、$0 < x < 1$ で正、$x > 1$ で負となる。よって、$0 < x < 1$ にあるときには増加し、$x > 1$ にあるときには減少する。このことから、$x = 0$ は不安定固定点、$x = 1$ は安定固定点と考えられ、厳密解の挙動と一致する。

(iii) $-x\ln x = 0$ より、$x = 1$ が固定点。また、$\lim_{x\to+0} x\ln x = 0$ より $x = 0$ も固定点に準じて考えることができる。$y = -x\ln x$ のグラフを考えると、$0 < x < 1$ で正、$x > 1$ で負になる。ちなみに、この微分方程式は変数分離系で解くことができる。その結果得られる解は

$$x = \exp\left[\ln(x_0)\exp(-t)\right]$$

である。

III. $z = x + iy$ とおいて代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x+iy) &= (a+i\omega)(x+iy) - (1+ib)(x^2+y^2)(x+iy) \\ &= \Big[ax - \omega y - (x^2+y^2)(x-by)\Big] + \Big[\omega x + ay - (x^2+y^2)(y+bx)\Big] i\end{aligned}$$

それぞれ実部と虚部の方程式を書くと

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= ax - \omega y - \left(x^2+y^2\right)(x-by) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \omega x + ay - \left(x^2+y^2\right)(y+bx)\end{aligned}$$

これを極座標 $x = r\cos\theta$、$y = \sin\theta$ に変換する。$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$、$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta$、$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}$、$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$ を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= \cos\theta\left[ax - \omega y - \left(x^2+y^2\right)(x-by)\right] + \sin\theta\left[\omega x + ay - \left(x^2+y^2\right)(y+bx)\right] \\ &= ar - r^3 \\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\sin\theta}{r}\left[ax - \omega y - \left(x^2+y^2\right)(x-by)\right] + \frac{\cos\theta}{r}\left[\omega x + ay - \left(x^2+y^2\right)(y+bx)\right] \\ &= \omega - br^2\end{aligned}$$

複素数表示から求めようとすると、$z = re^{i\theta}$ とおいて代入する。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}e^{i\theta} + ire^{i\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

かつ、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{z} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}e^{-i\theta} - ire^{-i\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

より

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}e^{-i\theta} + \frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}t}e^{i\theta}\right] = \Re\left[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}e^{-i\theta}\right] = \Re\left[(a+i\omega)r - (1+ib)r^3\right] = ar - r^3$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2ir}\left[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}e^{-i\theta} - \frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}t}e^{i\theta}\right] = -\frac{i}{r}\Im\left[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}e^{-i\theta}\right] = -\frac{i}{r}\Im\left[(a+i\omega)r - (1+ib)r^3\right] = \omega - br^2$$

IV. $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ とおくと

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} = -K\sin(\Delta\theta - \alpha) - K\sin(\Delta\theta + \alpha) = -2K\cos\alpha\sin\Delta\theta$$

となる。$\dfrac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} = 0$ を満たすのは、$\cos\alpha \neq 0$ でなければ、$\theta = 0, \pi$。
安定性は、$\theta = 0$、$\theta = \pi$ での傾きが重要であり、傾きは $\cos\alpha$ の符号による。これを考慮して、

- $\cos\alpha > 0$、つまり、$0 \leq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$、$\dfrac{3\pi}{2} < \alpha \leq 2\pi$ のときには、$\theta = 0$ が安定、$\theta = \pi$ が不安定。
- $\cos\alpha < 0$、つまり、$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ のときには、$\theta = 0$ が不安定、$\theta = \pi$ が安定。

V. (i) 固定点を求めるため、$a_n = a_{n+1} = a_\infty$ とおいて、$a_\infty = 3a_\infty - a_\infty^3$ より $a_\infty = 0, \pm\sqrt{2}$。
まず、$a_n = 0$ について、$a_n = 0 + \Delta a_n$ とおいて代入すると、

$$\Delta a_{n+1} = 3\Delta a_n + o\left(\Delta a_n^2\right)$$

より不安定。
次に、$a_n = \pm\sqrt{2}$ について

$$\pm\sqrt{2} + \Delta a_{n+1} = 3\Big((\pm\sqrt{2} + \Delta a_n\Big) - \Big((\pm\sqrt{2} + \Delta a_n\Big)^3 = 3\Big((\pm\sqrt{2} + \Delta a_n\Big) \mp 2\sqrt{2} - 6\Delta a_n + o\left(\Delta a_n^2\right)$$

よって、

$$\Delta a_{n+1} = -3\Delta a_n + o\left(\Delta a_n^2\right)$$

これより $a_n = \pm\sqrt{2}$ は不安定。

(ii) 固定点を求めるため、$a_n = a_{n+1} = a_\infty$ とおいて、$a_\infty = \dfrac{a_\infty}{2} + \dfrac{1}{a_\infty}$ より $a_\infty = \pm\sqrt{2}$。
$a_n = \pm\sqrt{2} + \Delta a_n$ とおいて代入すると、

$$\pm\sqrt{2} + \Delta a_{n+1} = \frac{\pm\sqrt{2} + \Delta a_n}{2} + \frac{1}{\pm\sqrt{2} + \Delta a_n} = \frac{\pm\sqrt{2} + \Delta a_n}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 \mp \frac{\Delta a_n}{\sqrt{2}} + \frac{\Delta a_n^2}{2}\right) + o\left(\Delta a_n^3\right)$$

よって、

$$\Delta a_{n+1} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}a_n^2 + o\left(\Delta a_n^3\right)$$

Δa_n が小さい時、0 に収束するので、$a_n = \pm\sqrt{2}$ は安定。

VI. VII. 略

講義のシラバス・資料など： http://cu.phys.s.chiba-u.ac.jp/lecture/busseiC/
北畑の連絡先：kitahata@physics.s.chiba-u.ac.jp, TEL:043-290-3723