2011.11.15

物性物理学C 第1回レポート

提出期限: 2011 年 11 月 29 日 (火) 14:30
提出先: 理学部 2 号館 402 号室 (北畑)　又は講義開始時に提出

以下の問題から 3 題以上を選んで解答しなさい。

I. 断熱壁で囲まれた体積 V の 2 つの箱 A、B があり、それぞれに n モルの理想気体が閉じ込められている。初期状態において A の内部の温度は T_{A}、B の内部の温度は T_{B} であった。この二つの箱を熱的に接触させた。この場合も熱は二つの気体の間のみを行き来するものとし、外界とは断熱されているものとする。十分時間がたったとき、二つの箱の中の温度は一定 (T_0) となった。気体定数を R、定積モル比熱を C_{V} として、以下の問いに答えなさい。（理想気体は単原子分子とは規定していないため $C_{\mathrm{V}} = 3R/2$ とは限らないので注意。）

(a) 最終的な平衡温度 T_0 を求めなさい。

(b) 最終状態に到達するまでに A から B へ流れた熱量を求めなさい。

(c) A、B それぞれについて、初期状態から最終状態までのエントロピーの変化量を求めなさい。

(d) 初期状態から最終状態までの系全体のエントロピーの変化量を求めなさい。またそれが非負であることを確認しなさい。

II. 1 次元ランダムウォークを一般化し、次のように時間的に変化する時を考える。

$$x_{i+1} = x_i + \xi_i$$

ただし、

$$\xi_i = \begin{cases} a_1 & (\text{確率} \quad p_1) \\ a_2 & (\text{確率} \quad p_2) \\ \vdots & \qquad \vdots \\ a_m & (\text{確率} \quad p_m) \end{cases}$$

ここで $0 < p_k < 1$、$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$ とし、$i \neq j$ である ξ_i と ξ_j の間には相関がないものとする。また、$x_0 = 0$ である。このときの粒子の位置の平均 $\langle x_n \rangle$、および分散 $\langle (x_n - \langle x_n \rangle)^2 \rangle$ を計算しなさい。

III. N 次元系での拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u$$

を考える。この場合の Green 関数は

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(4\pi D t)^{\frac{N}{2}}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}|^2}{4Dt}\right)$$

と書ける。

(a) N 次元の場合にこの関数が拡散方程式を満たすこと、$t \to +0$ の極限で $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ で 0 に収束すること、全空間で積分すると 1 になることを確かめなさい。

(b) N 次元の場合に初期値がデルタ関数であった場合の分散、つまり $|\mathbf{r}|^2$ の期待値を計算しなさい。

IV. 1 次元の熱拡散方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{\mathrm{T}} \nabla^2 T$$

を考える。ただし、D_{T} は熱拡散定数である。講義中には境界条件がない系についての Green 関数を用いて問題を解く方法を考えた。しかし、実際には境界条件が指定されている場合も多い。たとえば、熱拡散方程式が $x \le x_0$ でのみで定義される場合を考える。（ただし、$x_0 > 0$ とする。）初期条件が $x \le x_0$ で $T(x, T=0) = f(x)$ と定義される（もちろん初期条件も境界条件を満たしているとする）とき、どのように Green 関数を用いて考えればよいかを、次の 2 つの境界条件に関して議論しなさい。

(a) $x = x_0$ において、$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = 0$。（反射壁：Neumann 条件）

(b) $x = x_0$ において、$T = 0$。（吸熱壁：Dirichlet 条件）

V. ランジュバン方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \xi(t)$$

において、粒子の質量が十分に小さいときには、左辺を無視することにより、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\gamma}\xi(t)$$

となる。この方程式に関して、$\langle x(t_2) - x(t_1)\rangle$、$\langle x(t_1)x(t_2)\rangle$、$\langle (x(t_2) - x(t_1))^2\rangle$ をそれぞれ求めなさい。ただし、ノイズ $\xi(t)$ は時間相関がないとする。すなわち、

$$< \xi(t) >= 0$$

$$< \xi(t)\xi(s) >= 2M\delta(t-s)$$

である。

VI. 次にあげる内容のうち一つを選び、計算機を用いて数値計算を行った結果を示しなさい。ただし、どのようにプログラムを作ったかのアルゴリズムについても簡単に記述すること。

(a) ランダムウォーク

(b) ランジュバン方程式

(c) 拡散方程式

VII. 次にあげるキーワードのうち一つを選んで、教科書などを調べ、その内容をできるだけ詳しく説明しなさい。

(a) ボルツマン (Boltzmann) 方程式

(b) フォッカー・プランク (Fokker-Planck) 方程式

講義に対する感想、要望などあれば書いてください（成績には反映されません）

講義のシラバス・資料など： http://cu.phys.s.chiba-u.ac.jp/lecture/busseiC/

北畑の連絡先：kitahata@physics.s.chiba-u.ac.jp, TEL:043-290-3723