

## 物性物理学C 第2回レポート

提出期限: 2010年2月7日(火)17:00まで  
提出先: 理学部2号館402号室(北畑)

以下の問題から3題以上を選んで解答しなさい。

I. 次の力学系の固定点をすべて求め、それぞれの安定性を調べなさい。

(i)  $\frac{dx}{dt} = 2x - x^3$

(ii)  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 + x^2y - ax - x \\ \frac{dy}{dt} = ax - x^2y \end{cases}$  ( $a$ の値で場合分けすること)

(iii)  $\frac{dx}{dt} = x^3(x - 1)$

(これは講義中扱わなかったものです。考えてみてください。)

II. ロジスティック方程式

$$\frac{dx}{dt} = x(a - x)$$

は解析的に解くことができる。ただし、 $t = 0$ で $x = x_0(x_0 > 0)$ であるとする。

(i) この方程式を解析的に解き、 $t \rightarrow \infty$ の極限での値を求めなさい。 $a$ の符号に注意すること。

(ii) この方程式の固定点を求め、 $y = x(a - x)$ のグラフの形状を考えることにより長時間の挙動を議論し、厳密解と比べなさい。

III. Stuart-Landau 方程式を複素数で書くと、

$$\frac{dz}{dt} = (a + i\omega)z - (1 + ib)|z|^2z$$

と書ける。(ここでは $a > 0$ 、 $|ab| < \omega$ とする。)

(i)  $z = re^{i\theta}$ において、 $r$ 、 $\theta$ での方程式として表しなさい。(複素共役を計算すると計算しやすい)

(ii) このときのリミットサイクルの形状、およびその周期 $T$ を求めなさい。

(iii)  $\theta$ の時間変化に着目すると $r$ によって進み方が変わる。つまり、 $\frac{d\theta}{dt} = f(r, \theta)$ となっている。新たに位相 $\Theta(r, \theta)$ を $\frac{d\Theta}{dt} = \frac{2\pi}{T}$ となるように定義したい。このとき、等位相面( $\Theta = \text{一定}$ )はどのようなになるか?  $b > 0$ と $b < 0$ のときの概形を描きなさい。(等位相面の方程式を求めてもよい。その場合には $\Theta = \theta + f(r)$ となることを用いて解くと計算しやすい。)

IV. 位相記述された振動子に角振動数  $\Omega$  で周期的に力を加えることを考える。すなわち、

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega + K \sin(\Omega t - \theta)$$

ただし、 $K > 0$  とする。このとき、外力の周期に追従して振動する場合（同期）と、追従しない場合（非同期）が見られる。それぞれの条件を  $K$  の値の大きさによって分類しなさい。また、非同期の場合の振動子の角振動数の長時間平均を求めなさい。（ヒント： $\Delta\theta = \theta - \Omega t$  とおいて考えると見通しが立てやすい。）

V. 次の写像力学系の固定点を求め、安定性を議論しなさい。

(i)  $a_{n+1} = 4a_n - a_n^3$

(ii)  $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{k}{2a_n}$  ( $k > 0$ ) (これは少し難しいかもしれません。)

VI. 次あげる内容のうち一つを選んで数値計算を行いなさい。その結果をわかりやすく示しなさい。

- (a) 周期が異なるリミットサイクル振動子の同期現象
- (b) チューリング (Turing) パターン
- (c) ロジスティック写像によるカオス

VII. 次あげるキーワードのうち一つを選び、その内容をできるだけ詳しく説明しなさい。

- (a) アーノルドの舌 (Arnold's tongue)
- (b) ストレンジアトラクター (Strange attractor)
- (c) フラクタル次元 (fractal dimension)

講義に対する感想、要望などあれば書いてください（成績には反映されません）

レポートは2月14日頃以降に2号館402号室まで取りに来てください。また、成績に関する問い合わせの掲示をする可能性があるため、2月11日（金）～2月14日（火）の間に必ず理学部1号館122号室前の掲示板を確認してください。なお、個人名、学籍番号を掲示されたくない人は、レポート提出時にその旨連絡してください。また、その際は必ずこちらから連絡がとれる連絡先（メールアドレスなど）も合わせて連絡してください。

講義のシラバス・資料など：<http://cu.phys.s.chiba-u.ac.jp/lecture/busseiC/>

北畑の連絡先：[kitahata@physics.s.chiba-u.ac.jp](mailto:kurahata@physics.s.chiba-u.ac.jp), TEL:043-290-3723