2012.2.10

物性物理学C 第2回レポート 略解

I. 以下のように固定点を求め、そのまわりに線形安定性解析を行う。

(i) 固定点を求めると $2x-x^3=0$ より $x=0,\pm\sqrt{2}$。それぞれの固定点について安定性解析をする。
$x=0$ まわりで $x=0+\Delta x$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t}=2\Delta x+o\left(\Delta x^2\right)$$

よって、不安定である。
$x=\pm\sqrt{2}$ まわりで $x=\pm\sqrt{2}+\Delta x$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t}=2\left(\pm\sqrt{2}+\Delta x\right)-\left(\pm\sqrt{2}+\Delta x\right)^3=-4\Delta x+o\left(\Delta x^2\right)$$

よって、安定である。

(ii) 固定点を求めると $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$ より $x=1,y=a$。
$x=1+\Delta x$、$y=a+\Delta y$ とおいて代入すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+(1+\Delta x)^2(a+\Delta y)-a(1+\Delta x)-(1+\Delta x)\\ a(1+\Delta x)-(1+\Delta x)^2(a+\Delta y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-1 & 1\\ -a & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}$$

この固有値は $\lambda^2-(a-2)\lambda+1=0$ の解。これは、$a>2$ のときには固有値の実部は2つとも正、$a<2$ のときには固有値の実部が2つとも負。よって、$a>2$ のときは不安定、$a<2$ のときは安定。

(iii) 固定点を求めると $x^3(x-1)=0$ より $x=0,1$。それぞれの固定点について安定性解析をする。
$x=1$ のまわりで $x=1+\Delta x$ とおくと

$$\frac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t}=(1+\Delta x)^3(1+\Delta x-1)=\Delta x+o\left(\Delta x^2\right)$$

よって、不安定である。
$x=0$ の固定点について考える。
$x=0+\Delta x$ とおいて代入し、展開すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x=(\Delta x)^3(\Delta x-1)=-(\Delta x)^3+o\left(\Delta x^4\right)$$

線形の部分 (Δx の1次の部分) だけを考えると0なので中立安定のように思われるが、線形部分が0のときには、高次の項が重要となる。この場合は、$(\Delta x)^2$ の項も0なので、$(\Delta x)^3$ の項が重要となる。常に、$\Delta x<0$ のときには $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x<0$ かつ、$\Delta x>0$ のときには $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x>0$ であるので、すべての Δx について0に収束していく。「安定」の定義は「どんな摂動に対しても固定点に収束する」ことであるので、$x=0$ は安定である。

II. (i) ロジスティック方程式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(a-x)$$

は変数分離することにより解くことができる。

$$\int \frac{\mathrm{d}x'}{x'(a-x')} = \int \mathrm{d}t'$$

$$\int \frac{1}{a}\left(\frac{1}{x'} + \frac{1}{a-x'}\right)\mathrm{d}x' = \int \mathrm{d}t'$$

これを t で積分する。

$$\frac{1}{a}\left[\ln|x| - \ln|a-x|\right] + C = t$$

ただし、C は積分定数

$$\left|\frac{x}{a-x}\right| = \exp\left[a(t-C)\right]$$

これより、$0 < x < a$ ならば

$$\frac{x}{a-x} = -\exp(a(t-C))$$

$x < 0$ または $x > a$ ならば

$$\frac{x}{a-x} = \exp(a(t-C))$$

ここで、前者なら $-e^{-aC} = K$、後者なら $e^{-aC} = K$ とおけば、一般解は

$$\frac{x}{a-x} = K\exp(at)$$

とできる。初期条件 $t = 0$ で $x = x_0$ を代入して $K = \dfrac{x_0}{a-x_0}$。これより

$$x = \frac{aK\exp(at)}{1+K\exp(at)} = \frac{ax_0\exp(at)}{a-x_0+x_0\exp(at)} = \frac{ax_0}{x_0+(a-x_0)\exp(-at)}$$

$x_0 > 0$ の条件があるので、$a > 0$ のときには、常に x は a に収束する。$a < 0$ のときには、x は 0 に収束する。

(ii) 固定点は $x = 0, a$。$y = x(a-x)$ のグラフを考えると、$a > 0$ なら $0 < x < a$ で正、$x < 0$ と $x > a$ で負となる。よって、$0 < x < a$ にあるときには増加し、$x > a$ にあるときには減少する。（$x_0 > 0$ よりこの二通りしかない。）このことから、$x = 0$ は不安定固定点、$x = 1$ は安定固定点と考えられ、厳密解の挙動と一致する。また、$a < 0$ のときには、$a < x < 0$ で正、$x < a$ と $x > 0$ で負となる。よって、$x_0 > 0$ より、常に x は減少する。つまり、$x = 0$ は安定固定点である。

III. (i) $z = re^{i\theta}$ とおいて代入する。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}e^{i\theta} + ire^{i\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

かつ、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{z} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}e^{-i\theta} - ire^{-i\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

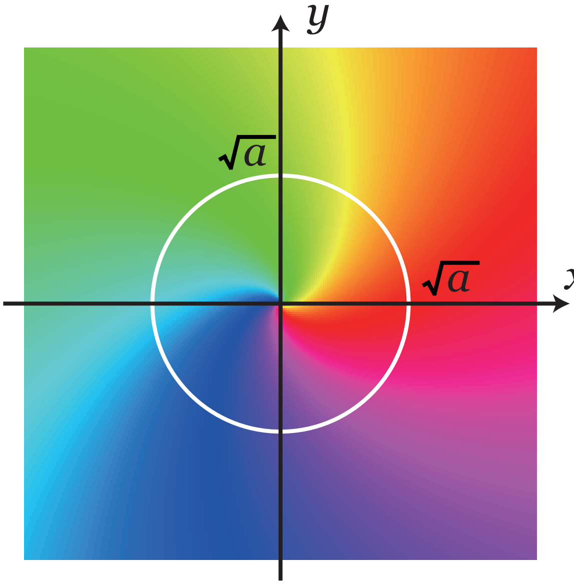
より

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}e^{-i\theta} + \frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}t}e^{i\theta}\right] = \Re\left[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}e^{-i\theta}\right] = \Re\left[(a+i\omega)r - (1+ib)r^3\right] = ar - r^3$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2ir}\left[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}e^{-i\theta} - \frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}t}e^{i\theta}\right] = -\frac{i}{r}\Im\left[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}e^{-i\theta}\right] = -\frac{i}{r}\Im\left[(a+i\omega)r - (1+ib)r^3\right] = \omega - br^2$$

(ii) (i) の結果より、r 方向の時間変化は $a>0$ より $0<r<\sqrt{a}$ で増加、$r<\sqrt{a}$ で減少となる。つまり、$r=a$ に収束する。つまり、リミットサイクルは $r=\sqrt{a}$ と書ける。また、その時の周期は $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega-ba$ となるので、$T=\dfrac{2\pi}{\omega-ba}$ である。

(iii) $b>0$ のときには、半径によって、各速度が異なる。リミットサイクルは $r=\sqrt{a}$ の位置にあるが、それより外側だと角度の進み方が遅くなり、内側だと速くなる。このことを考慮すると、リミットサイクルの外側にあるとき、時間が十分にたったあと漸近するリミットサイクル上の点は、今考えている点よりも後方にある。またリミットサイクルの内側にあるときには、逆に前方にあることになる。このような点をつないでいくと、内から外に進むに従って、中心からの角度が大きくなるような曲線になると予想される。つまり $r=f(\theta)$ という形で書くならば、f は θ の増加関数になる。$b<0$ のときにはまったく逆の議論ができ、$\theta=f(r)$ という形で書くならば、f は θ の減少関数になる。具体的には図のようになる (図は $b=0.5$ の場合)。



等位相面を求めるには、$\Theta=\theta+f(r)$ とおいて、$\dfrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}=\omega-ab$ に代入する。

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\omega-ab$$

より

$$\omega-br^2+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\left(ar-r^3\right)=\omega-ab$$

となり、

$$\left(r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}+b\right)\left(a-r^2\right)=0$$

よって、

$$r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}+b=0$$
$$f(r)=-b\ln r+c$$

つまり、

$$\Theta(r,\theta)=\theta-b\ln r+c$$

となる。これより、等位相面 ($\Theta=$ 一定) は

$$\theta = b\ln r + \theta_0$$

となる。これは、対数らせんの式である。

IV. $\Delta\theta = \theta - \Omega t$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}(\Omega t + \Delta\theta)}{\mathrm{d}t} = \omega + K\sin\left(\Omega t - (\Omega t + \Delta\theta)\right)$$

変形すると

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} = \omega - \Omega - K\sin(\Delta\theta)$$

$\Delta\omega = \omega - \Omega$ とおくと、$K < |\Delta\omega|$ のときには、常に $\dfrac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} > 0$ となり、同期しない。一方、$K > |\Delta\omega|$ のときには、$\dfrac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} > 0$ となる領域と $\dfrac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} < 0$ となる領域ができ、その境界の $\dfrac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} = 0$ となる点が固定点となる。2 つの固定点のうち一方が安定固定点となり、引き込む。

同期しない領域での振動子の角振動数の長時間平均を求める。θ が Ωt とくらべて、2π だけずれるのにかかる時間、つまり $|\Delta\theta|$ が 2π になるのにかかる時間を T とすると

$$T = \int_0^{2\pi} \left| \left(\frac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t}\right)^{-1} \right| \mathrm{d}\Delta\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\Delta\theta}{|\Delta\omega - K\sin(\Delta\theta)|}$$

ここで、公式 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{a - b\sin\phi} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{a - b\cos\phi} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$（ただし $|a| > |b|$ を用いて

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta\omega^2 - K^2}}$$

$\Delta\omega$ の長時間平均 $\bar{\Delta\omega}$ は $\omega > \Omega$ のときには、$\bar{\Delta\omega} = \dfrac{2\pi}{T}$ となり、$\omega > \Omega$ のときには、$\bar{\Delta\omega} = -\dfrac{2\pi}{T}$ となる。よって、角振動数の長時間平均 $\bar{\omega}$ は $\bar{\omega} = \Omega + \bar{\Delta\omega}$ より

$$\bar{\omega} = \Omega + \frac{2\pi}{T} = \begin{cases} \Omega + \sqrt{(\Omega-\omega)^2 - K^2} & (\omega > \Omega) \\ \Omega - \sqrt{(\Omega-\omega)^2 - K^2} & (\omega < \Omega) \end{cases}$$

ここに、同期の条件まで含めると、同期している時には $\bar{\omega} = \Omega$ としてもよいので

$$\bar{\omega} = \begin{cases} \Omega + \sqrt{(\Omega-\omega)^2 - K^2} & (\omega > \Omega + K) \\ \Omega & (\Omega - K < \omega < \Omega + K) \\ \Omega - \sqrt{(\Omega-\omega)^2 - K^2} & (\omega < \Omega - K) \end{cases}$$

となる。

V. (i) 固定点を求めるため、$a_n = a_{n+1} = a_\infty$ とおいて、$a_\infty = 4a_\infty - a_\infty^3$ より $a_\infty = 0, \pm\sqrt{3}$。
まず、$a_n = 0$ について、$a_n = 0 + \Delta a_n$ とおいて代入すると、

$$\Delta a_{n+1} = 4\Delta a_n + o\left(\Delta a_n^2\right)$$

より不安定。
次に、$a_n = \pm\sqrt{3}$ について

$$\pm\sqrt{3}+\Delta a_{n+1} = 4\left((\pm\sqrt{3}+\Delta a_n\right) - \left((\pm\sqrt{3}+\Delta a_n\right)^3 = 4\left((\pm\sqrt{3}+\Delta a_n\right) \mp 3\sqrt{3} - 9\Delta a_n + o\left(\Delta a_n^2\right)$$

よって、

$$\Delta a_{n+1} = -5\Delta a_n + o\left(\Delta a_n^2\right)$$

これより $a_n = \pm\sqrt{3}$ は不安定。

(ii) 固定点を求めるため、$a_n = a_{n+1} = a_\infty$ とおいて、$a_\infty = \dfrac{a_\infty}{2} + \dfrac{k}{2a_\infty}$ より $a_\infty = \pm\sqrt{k}$。
$a_n = \pm\sqrt{k} + \Delta a_n$ とおいて代入すると、

$$\pm\sqrt{k}+\Delta a_{n+1} = \frac{\pm\sqrt{k}+\Delta a_n}{2} + \frac{k}{2\left(\pm\sqrt{k}+\Delta a_n\right)} = \frac{\pm\sqrt{k}+\Delta a_n}{2} \pm \frac{k}{2\sqrt{k}}\left(1 \mp \frac{\Delta a_n}{\sqrt{k}} + \frac{\Delta a_n^2}{k}\right) + o\left(\Delta a_n^3\right)$$

よって、

$$\Delta a_{n+1} = \pm\frac{1}{2\sqrt{k}}\Delta a_n^2 + o\left(\Delta a_n^3\right)$$

Δa_n が小さい時、0 に収束するので、$a_n = \pm\sqrt{k}$ は安定。
この方法は、平方根を求める際に非常に効率よく収束していきます。(Δa_n^2 しか残らないため。)
$k < 0$ ならどうなるでしょう?

VI. VII. 略

講義のシラバス・資料など： http://cu.phys.s.chiba-u.ac.jp/lecture/busseiC/
北畑の連絡先：kitahata@physics.s.chiba-u.ac.jp, TEL:043-290-3723