2011.11.15

物性物理学C 第1回レポート

提出期限: 2012年12月4日 (火) 14:30
提出先: 理学部2号館402号室 (北畑)　又は講義開始時に提出

以下の問題から3題以上を選んで解答しなさい。

I. N 個の理想気体をピストンに閉じ込めた系を考える。$T = T_{\mathrm{H}}$ の高温熱源と $T = T_{\mathrm{L}}$ の低温熱源を準備し以下の過程を行う。すなわち、

- 過程 I（状態 A→B）：高温熱源に接して準静的に α 倍に体積を膨張させる。
- 過程 II（状態 B→C）：低温熱源と同じ温度になるまで断熱的に体積を膨張させる。
- 過程 III（状態 C→D）：低温熱源に接して準静的に体積を収縮させる。
- 過程 IV（状態 D→A）：高温熱源と同じ温度になるまで断熱的に体積を圧縮させる。

を行う。この4つの過程を連続的に行うことを1サイクルと呼ぶ。これはカルノーサイクルとしてよく知られている。ボルツマン定数を k_{B}、1分子あたりの定積比熱を C_{V} として以下の問いに答えなさい。

(a) 1サイクルで系が外部にする仕事 W（した仕事 − された仕事）を計算しなさい。
(b) 1サイクルで高温熱源から系に入る熱量 Q_{in} を計算しなさい。
(c) 熱効率 $\eta = W/Q_{\mathrm{in}}$ を計算しなさい。
(d) それぞれの過程におけるエントロピーの変化を計算しなさい。
(e) 1サイクルでのエントロピーの変化を求めなさい。

II. 一般化した N 次元の正方格子上でのランダムウォークをを考える。

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \xi_i$$

ただし、ξ_i は大きさが格子の間隔 a に等しいベクトルで、向きは隣接している格子点の方向を向くものである。隣接格子点の数は $2N$ 個であるので、$\dfrac{1}{2N}$ の等しい確率をとる。$\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ であったとして、粒子の位置の平均 $\langle \mathbf{x}_n \rangle$、および分散 $\left\langle |\mathbf{x}_n - \langle \mathbf{x}_n \rangle|^2 \right\rangle$ を計算しなさい。

III. N 次元系での拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u$$

を考える。この場合の Green 関数は

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{A}{t^{\frac{N}{2}}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}|^2}{4Dt}\right)$$

と書ける。

(a) N 次元の場合にこの関数が拡散方程式を満たすことを確かめなさい。
(b) 規格化条件（全空間で積分すると1になる）から A の値を求めなさい。
(c) N 次元の場合に初期値がデルタ関数であった場合の分散，つまり $|\mathbf{r}|^2$ の期待値を計算しなさい。

IV. 1 次元の熱拡散方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{\mathrm{T}} \nabla^2 T$$

を考える。ただし、D_{T} は熱拡散定数である。講義中には境界条件がない（つまり無限遠まで熱が拡散していく）系についての Green 関数 $G(x,t)$ を用いて問題を解く方法を考えた。しかし、実際には境界条件が指定されている場合も多い。たとえば、熱拡散方程式が $x \geq -x_0 (x_0 > 0$ とする。) で定義される場合を考える。初期条件も境界条件を満たしているとする。境界条件が次にあげるものであるとき、講義中に扱った境界条件がない系についての Green 関数 $G(x,t)$ を用いて、新たに Green 関数 $\tilde{G(x,t)}$ を定義できることが知られている。このことを新たな Green 関数 $\tilde{G(x,t)}$ が (i) 境界条件条件を満たすこと、(ii) 熱拡散方程式を満たすことを満たしていること、を確認しなさい。

(a) $x = -x_0$ において、$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = 0$（反射壁:Neumann 条件）のとき、$\tilde{G(x,t)} = G(x,t) + G(-x-2x_0, t)$。

(b) $x = -x_0$ において、$T = 0$（吸熱壁：Dirichlet 条件）のとき、$\tilde{G(x,t)} = G(x,t) - G(-x-2x_0, t)$。

V. 場所にも時間にもよらない外力 F を受けているときの 1 次元ランジュバン方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F + \xi(t)$$

において、粒子の質量が十分に小さいときには、左辺を無視することにより、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{F}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\xi(t)$$

となる。$x(0) = 0$ として、$t > 0$ に対する $\langle x(t) \rangle$、$\left\langle (x(t) - \langle x(t) \rangle)^2 \right\rangle$ をそれぞれ求めなさい。ただし、ノイズ $\xi(t)$ は時間相関がないとする。すなわち、

$$< \xi(t) >= 0$$

$$< \xi(t)\xi(s) >= 2M\delta(t-s)$$

である。

VI. 次にあげる内容のうち一つを選び、計算機を用いて数値計算を行った結果を示しなさい。ただし、どのようにプログラムを作ったかのアルゴリズムについても簡単に記述すること。

(a) ランダムウォーク

(b) ランジュバン方程式

(c) 拡散方程式

VII. 次にあげるキーワードのうち一つを選んで、教科書などを調べ、その内容をできるだけ詳しく説明しなさい。

(a) ボルツマン (Boltzmann) 方程式

(b) フォッカー・プランク (Fokker-Planck) 方程式

講義に対する感想、要望などあれば書いてください（成績には反映されません）
講義のシラバス・資料など： http://cu.phys.s.chiba-u.ac.jp/lecture/busseiC/
北畑の連絡先：kitahata@physics.s.chiba-u.ac.jp, TEL:043-290-3723