2013.2.1

物性物理学C 第2回レポート 略解

I. 以下のように固定点を求め、そのまわりに線形安定性解析を行う。

(i) 固定点を求めると $x - x^3 = 0$ より $x = 0, \pm 1$。それぞれの固定点について安定性解析をする。
$x = 0$ まわりで $x = 0 + \Delta x$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t} = \Delta x + O\left(\Delta x^2\right)$$

よって、不安定である。
$x = \pm 1$ まわりで $x = \pm 1 + \Delta x$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t} = (\pm 1 + \Delta x) - (\pm 1 + \Delta x)^3 = -2\Delta x + O\left(\Delta x^2\right)$$

よって、安定である。

(ii) 固定点を求めると $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$ より $x = y = 0$。
$x = 0 + \Delta x$、$y = 0 + \Delta y$ とおいて代入すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + \Delta y \\ (a - (0 + \Delta y)^2)(0 + \Delta y) - (0 + \Delta x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

この固有値は $(a - \lambda)(-\lambda) + 1 = 0$ の解。これは、$\lambda > a$ のときには固有値の実部は 2 つとも正、$a < 0$ のときには固有値の実部が 2 つとも負。よって、$a > 0$ のときは不安定、$a < 0$ のときは安定。

(iii) 固定点を求めると $x^3 = 0$ より $x = 0$。それぞれの固定点について安定性解析をする。
$x = 0 + \Delta x$ とおいて代入し、展開すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x = -(0 + \Delta x)^3 = -(\Delta x)^3 + O\left(\Delta x^4\right)$$

線形の部分 (Δx の 1 次の部分) だけを考えると 0 なので中立安定のように思われるが、線形部分が 0 のときには、高次の項が重要となる。この場合は、$(\Delta x)^2$ の項も 0 なので、$(\Delta x)^3$ の項が重要となる。常に、$\Delta x < 0$ のときには $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x < 0$ かつ、$\Delta x > 0$ のときには $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x > 0$ であるので、すべての Δx について 0 に収束していく。「安定」の定義は「どんな摂動に対しても固定点に収束する」ことであるので、$x = 0$ は安定である。

II. **(i)**

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 - x^2$$

は変数分離することにより解くことができる。まず、$x = \pm 1$ のときには、微分が 0 になるので、$x = \pm 1$ は解。

$$\int \frac{\mathrm{d}x'}{(1 + x')(1 - x')} = \int \mathrm{d}t'$$

$$\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + x'} + \frac{1}{1 - x'}\right)\mathrm{d}x' = \int \mathrm{d}t'$$

これを t で積分する。

$$\frac{1}{2}\left[\ln|1+x|-\ln|1-x|\right]+C=t$$

ただし、C は積分定数

$$\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=\exp\left[2(t-C)\right]$$

これより $|x|<1$ なら

$$\frac{1+x}{1-x}=-\exp(2(t-C))$$

$|x|>1$ ならば

$$\frac{1+x}{1-x}=\exp(2(t-C))$$

ここで、前者なら $-e^{-2C}=K$、後者なら $e^{-2C}=K$ とおけば、一般解は

$$\frac{1+x}{1-x}=K\exp(2t)$$

とできる。初期条件 $t=0$ で $x=x_0$ を代入して $K=\dfrac{1+x_0}{1-x_0}$。これより

$$x=\frac{K\exp(2t)-1}{K\exp(2t)+1}=\frac{(1+x_0)\exp(2t)-(1-x_0))}{(1+x_0)\exp(2t)+(1-x_0)}$$

$t\to\infty$ のとき、$x_0>-1$ を考えると、常に x は 1 に収束する。
初期値 x_0 が -1 より小さいときも同様に解の形は書けるが、有限の時間で解が発散することがわかる。

(ii) 固定点は $x=\pm 1$。$y=1-x^2$ のグラフを考えると、$-1<x<1$ で正、$x<-1$ と $x>1$ で負となる。よって、$-1<x<1$ にあるときには増加し、$x>1$、$x<-1$ にあるときには減少する。このことから、$x=-1$ は不安定固定点、$x=1$ は安定固定点と考えられる。

III. **(i)** $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\cos\theta$、$\dfrac{\partial r}{\partial y}=\sin\theta$、$\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=-\dfrac{\sin\theta}{r}$、$\dfrac{\partial\theta}{\partial y}=\dfrac{\cos\theta}{r}$ を用いると、

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= \cos\theta\left[ax-\omega y-\left(x^2+y^2\right)(x-by)\right] \\
&\quad +\sin\theta\left[\omega x+ay-\left(x^2+y^2\right)(y+bx)\right] \\
&= ar-r^3 \\
\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\sin\theta}{r}\left[ax-\omega y-\left(x^2+y^2\right)(x-by)\right] \\
&\quad +\frac{\cos\theta}{r}\left[\omega x+ay-\left(x^2+y^2\right)(y+bx)\right] \\
&= \omega-br^2
\end{aligned}$$

(ii) **(i)** の結果より、r 方向の時間変化は $a>0$ より $0<r<\sqrt{a}$ で増加、$r<\sqrt{a}$ で減少となる。つまり、$r=a$ に収束する。つまり、リミットサイクルは $r=\sqrt{a}$ と書ける。また、その時の周期は $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega-ba$ となるので、$T=\dfrac{2\pi}{\omega-ba}$ である。

IV. $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ とおくと

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} = -K\sin(\Delta\theta + \alpha) - K\sin(\Delta\theta - \alpha) = -2K\cos\alpha\sin\Delta\theta$$

となる。$\dfrac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} = 0$ を満たすのは、$\cos\alpha \neq 0$ でなければ、$\theta = 0, \pi$。
安定性は、$\theta = 0$、$\theta = \pi$ での傾きが重要であり、傾きは $\cos\alpha$ の符号による。これを考慮して、

- $\cos\alpha > 0$、つまり、$0 \leq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$、$\dfrac{3\pi}{2} < \alpha \leq 2\pi$ のときには、$\theta = 0$ が安定、$\theta = \pi$ が不安定。
- $\cos\alpha < 0$、つまり、$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ のときには、$\theta = 0$ が不安定、$\theta = \pi$ が安定。

V. (i) 固定点を求めるため、$a_n = a_{n+1} = a_\infty$ とおいて、$a_\infty = 5a_\infty - a_\infty^3$ より $a_\infty = 0, \pm 2$。
まず、$a_n = 0$ について、$a_n = 0 + \Delta a_n$ とおいて代入すると、

$$\Delta a_{n+1} = 5\Delta a_n + O\left(\Delta a_n^3\right)$$

より不安定。
次に、$a_n = \pm 2$ について

$$\pm 2 + \Delta a_{n+1} = 5\left((\pm 2 + \Delta a_n) - ((\pm 2 + \Delta a_n)^3 = \mp 2 - 7\Delta a_n + O\left(\Delta a_n^2\right)\right.$$

よって、$a_n = \pm 2$ も不安定。

(ii) 固定点を求めるため、$a_n = a_{n+1} = a_\infty$ とおいて、$a_\infty = \dfrac{a_\infty}{2} + \dfrac{k}{2{a_\infty}^2}$ より $a_\infty = k^{1/3}$。
$a_n = k^{1/3} + \Delta a_n$ とおいて代入すると、

$$\begin{aligned} k^{1/3} + \Delta a_{n+1} &= \frac{k^{1/3} + \Delta a_n}{2} + \frac{k}{2\left(k^{1/3} + \Delta a_n\right)^2} \\ &= \frac{k^{1/3} + \Delta a_n}{2} + \frac{k}{2k^{2/3}}\left(1 - 2\frac{\Delta a_n}{k^{1/3}} + 3\frac{\Delta a_n^2}{k^{2/3}}\right) + O\left(\Delta a_n^3\right) \end{aligned}$$

よって、

$$\Delta a_{n+1} = -\frac{1}{2}\Delta a_n + O\left(\Delta a_n^2\right)$$

Δa_n の絶対値が小さい時、0 に収束するので、$a_n = k^{1/3}$ は安定。
この方法は、立方根を求める際に非常に効率よく収束していきます。(Δa_n^2 しか残らないため。)

VI. VII. 略

講義のシラバス・資料など： http://cu.phys.s.chiba-u.ac.jp/lecture/busseiC/
北畑の連絡先：kitahata@physics.s.chiba-u.ac.jp, TEL:043-290-3723