2013.11.5

物性物理学 C 第 1 回レポート

提出期限: 2013 年 11 月 26 日 (火) 14:30
提出先: 理学部 2 号館 402 号室 (北畑)　又は講義開始時に提出

以下の問題から 3 題以上を選んで解答しなさい。

I. 温度 T、体積 V の N 分子の単原子理想気体を考える。初期状態を A とする。この気体に次の操作をして、温度 T、体積 $2V$ の状態 B に変化させる。ボルツマン定数を k_{B} として以下の問いに答えなさい。

(a) 温度 T の熱浴と接した状態を保ったまま、準静的に状態 A から状態 B まで変化させた時、内部エネルギーの変化、気体が外部にする仕事、気体が得た熱量、初期状態と終状態のエントロピーの変化を答えなさい。

(b) 断熱自由膨張させる（元の体積 V の気体の入った箱を体積 $2V$ の断熱された真空の箱の中に入れ、穴をあける）ことにより、状態 A から状態 B に変化させたとき、この過程での内部エネルギーの変化、気体が外部にする仕事、気体が得た熱量、初期状態と終状態のエントロピーの変化を答えなさい。

(c) それぞれの過程において、気体が外部に放出する熱量とエントロピーの変化、温度の関係はどうなっているか（$\mathrm{d}'Q = T\mathrm{d}S$ は成り立っているか）、また、それは何を反映しているのか説明しなさい。

II. 1 次元の格子上でのランダムウォークをを考える。格子の間隔は 1 とし、初期において $x_0 = 0$ と仮定する。すると以下の式に従って時間発展する。

$$x_{i+1} = x_i + \xi_i$$

ただし、ランダムな力 ξ_i は

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \left(\text{確率} \quad \dfrac{1+a}{2}\right) \\ -1 & \left(\text{確率} \quad \dfrac{1-a}{2}\right) \end{cases}$$

で時間相関がないとする。ただし、$0 < a < 1$ である。このときの、確率の分布の平均 $\langle x_n \rangle$、分散 $\langle (x_n - \langle x_n \rangle)^2 \rangle$ を求めなさい。また、$a = 0$ のときについて、3 次のモーメント $\langle (x_n - \langle x_n \rangle)^3 \rangle$、4 次のモーメント $\langle (x_n - \langle x_n \rangle)^4 \rangle$ を計算しなさい。

III. **II.** と同様の 1 次元の格子上でのランダムウォークをを考える。このとき、離散的な時刻 i において、サイト（格子点）n にいる確率を $P(n, i)$ とする。ただし、n と i は整数である。

(a) $P(n, i+1)$ を $P(n, i)$、$P(n+1, i)$、$P(n-1, i)$ を用いて表しなさい。

(b) 離散的な時間 i の間隔を Δt とし、離散的な空間 n の間隔を Δx とする。$\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2} = C$ および $\dfrac{a\Delta t}{\Delta x} = V$ を一定として、Δt と Δx を 0 に近づけたときに得られる方程式を求めなさい。

IV. N 次元系での拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u$$

を考える。この場合の Green 関数は

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{A}{t^{\frac{N}{2}}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}|^2}{4Dt}\right)$$

と書ける。

(a) N 次元の場合にこの関数が拡散方程式を満たすことを拡散方程式に代入することにより確かめなさい。

(b) 規格化条件（全空間で積分すると 1 になる）から A の値を求めなさい。

(c) N 次元の場合に初期値がデルタ関数であった場合の分散，つまり $|\mathbf{r}|^2$ の期待値，および 4 次のモーメント，つまり $|\mathbf{r}|^4$ の期待値を計算しなさい。

V. 場所にも時間にもよらない外力 F を受けているときの 1 次元ランジュバン方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F + \xi(t)$$

を考える。$t > 0$ に対する $\langle x(t)\rangle$、$\langle v(t)\rangle$、$\left\langle (v(t) - \langle v(t)\rangle)^2 \right\rangle$ をそれぞれ求めなさい。ただし、$x(0) = 0$、$v(0) = 0$ とし、ノイズ $\xi(t)$ は時間相関がないとする。すなわち、

$$< \xi(t) >= 0$$

$$< \xi(t)\xi(s) >= 2M\delta(t - s)$$

である。

VI. 次にあげる内容のうち一つを選び、計算機を用いて数値計算を行った結果を示しなさい。ただし、どのようにプログラムを作ったかのアルゴリズムについても簡単に記述すること。

(a) ランダムウォーク

(b) 拡散方程式

VII. 次にあげるキーワードのうち一つを選んで、教科書などを調べ、その内容をできるだけ詳しく説明しなさい。

(a) ボルツマン (Boltzmann) 方程式

(b) フォッカー・プランク (Fokker-Planck) 方程式

講義に対する感想、要望などあれば書いてください（成績には反映されません）

11 月 19 日 (火) は休講です。

講義のシラバス・資料など： http://cu.phys.s.chiba-u.ac.jp/lecture/busseiC/

北畑の連絡先：kitahata@physics.s.chiba-u.ac.jp, TEL:043-290-3723