

物性物理学C 第2回レポート

提出期限: 2014年1月31日(金)

提出先: 理学部2号館402号室(北畑)

以下の問題から3題以上を選んで解答しなさい。

- I. 以下のように、摩擦力と周期的な力を受けながら運動する質量 m の質点の運動を考える。運動方程式は以下のように書ける。ただし、 $m > 0$ 、 $\gamma > 0$ とする。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\gamma \frac{dx}{dt} + f_0 \cos \omega t$$

- (a) 初期条件として、 $v = v_0$ であったとする。この質点の速度 $v(t)$ を求めなさい。
 (b) 左辺を無視した方程式(粘性極限)について、初期条件を $v = v_0$ として質点の速度 $v(t)$ を求めなさい。
 (c) (a) で求めた解について $\frac{m}{\gamma} \ll 1$ として、 t が十分に大きい時の解を求めなさい。

- II. 次の力学系の固定点をすべて求め、それぞれの安定性を調べなさい。

(i) $\frac{dx}{dt} = -\sin x$

(ii)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x(x-1)(x+1) - y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

(iii) $\frac{dx}{dt} = -x^3$

(これは講義中扱わなかったものです。考えてみてください。)

- III. Stuart-Landau 方程式を複素数で書くと、

$$\frac{dz}{dt} = (a + i\omega)z - (1 + ib)|z|^2 z$$

と書ける。(ここでは $a > 0$ 、 $|ab| < \omega$ とする。)

- (i) $z = re^{i\theta}$ において、 r 、 θ での方程式として表しなさい。(複素共役を計算すると計算しやすい)
 (ii) このときのリミットサイクルの形状、およびその周期 T を求めなさい。
 (iii) θ の時間変化に着目すると r によって進み方が変わる。つまり、 $\frac{d\theta}{dt} = f(r, \theta)$ となっている。新たに位相 $\Theta(r, \theta)$ を $\frac{d\Theta}{dt} = \frac{2\pi}{T}$ となるように定義したい。 $\Theta(r, \theta) = \theta + F(r)$ とおくことにより $F(r)$ についての微分方程式が得られる。それを解くことにより $F(r)$ を求めなさい。

IV. 位相記述された振動子に角振動数 Ω で周期的に力を加えることを考える。ただし、 $0 < \Omega < \omega$ とする。すなわち、

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega + K \sin(\Omega t - \theta)$$

ただし、 $K > 0$ とする。このとき、外力の周期に追従して振動する場合（同期）と、追従しない場合（非同期）が見られる。それぞれの条件を K の値の大きさによって分類しなさい。また、同期する場合、外力の位相 Ωt に対して、考えている振動子の位相 θ がどのような関係になるか求めなさい。（ヒント： $\Delta\theta = \theta - \Omega t$ とおいて考えると見通しが立てやすい。）

V. 次の写像力学系の固定点を求め、安定性を議論しなさい。

(i) $a_{n+1} = 1 + a_n - a_n^3$

(ii) $a_{n+1} = \exp(2(-a_n + 1))$

(iii) $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ (これは少し難しいかもしれませんが。)

VI. 次あげる内容のうち一つを選んで数値計算を行いなさい。その結果をわかりやすく示しなさい。

(a) リミットサイクル振動子の結合系

(b) チューリング (Turing) パターン

(c) ロジスティック写像によるカオス

VII. 次あげるキーワードのうち一つを選び、その内容をできるだけ詳しく説明しなさい。数式を用いて説明すること。

(a) アーノルドの舌 (Arnold's tongue)

(b) ポアンカレ写像 (Poincaré map)

(c) ローレンツカオス (Lorentz chaos)

講義に対する感想、要望などあれば書いてください（成績には反映されません）

レポートは2月5日(水)～12日(水)に2号館402号室まで取りに来てください。また、成績に関する問い合わせの掲示をする可能性があるため、2月3日(月)～2月12日(水)の間に必ず理学部1号館122号室前の掲示板を確認してください。なお、個人名、学籍番号を掲示されたくない人は、レポート提出時にその旨連絡してください。また、その際は必ずこちらから連絡がとれる連絡先(メールアドレスなど)も合わせて連絡してください。

講義のシラバス・資料など：<http://cu.phys.s.chiba-u.ac.jp/lecture/busseiC/>

北畑の連絡先：kitahata@physics.s.chiba-u.ac.jp, TEL:043-290-3723