2014.2.3

物性物理学C 第2回レポート 略解

I. (a) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v$ とすると、

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\gamma v + f_0 \cos\omega t$$

斉次方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\gamma v$$

なので、一般解は

$$v = A\exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)$$

となる。また、特解は

$$v = \Re\left(Ce^{i\omega t}\right)$$

とおいて代入することにより

$$\Re\left[mCi\omega e^{i\omega t} + \gamma Ce^{i\omega t} - f_0 e^{i\omega t}\right] = 0$$

よって、

$$C = \frac{f_0}{im\omega + \gamma} = \frac{f_0}{m^2\omega^2 + \gamma^2}\left(\gamma - im\omega\right)$$

となる。つまり、

$$v(t) = \frac{f_0}{m^2\omega^2 + \gamma^2}\left(\gamma\cos\omega t + m\omega\sin\omega t\right)$$

これより非斉次方程式の一般解は

$$v(t) = A\exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right) + \frac{f_0}{m^2\omega^2 + \gamma^2}\left(\gamma\cos\omega t + m\omega\sin\omega t\right)$$

となる。$t = 0$ で、$v = v_0$ であるので、A を求めると

$$A = v_0 - \frac{f_0\gamma}{m^2\omega^2 + \gamma^2}$$

となる。これより、

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{f_0\gamma}{m^2\omega^2 + \gamma^2}\right)\exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right) + \frac{f_0}{m^2\omega^2 + \gamma^2}\left(\gamma\cos\omega t + m\omega\sin\omega t\right)$$

となる。

(b) そのまま解けばよいので、

$$v(t) = \frac{f_0}{\gamma}\cos\omega t$$

(c) **(a)** で得られた式を変形して

$$v(t) = \frac{f_0}{\gamma}\frac{1}{\sqrt{\frac{m^2\omega^2}{\gamma^2} + 1}}\left(\cos\omega t + \frac{m\omega}{\gamma}\sin\omega t\right) \to \frac{f_0}{\gamma}\cos\omega t$$

となり、**(b)** と一致する。

II. 以下のように固定点を求め、そのまわりに線形安定性解析を行う。

(i) 固定点を求めると $\sin x = 0$ より $x = n\pi$(n は整数)。それぞれの固定点について安定性解析をする。
$x = n\pi$ まわりで $x = n\pi + \Delta x$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t} = -\sin(n\pi + \Delta x) = -\sin n\pi - \cos n\pi \Delta x + O\left(\Delta x^2\right) = -(-1)^n \Delta x + O\left(\Delta x^2\right)$$

n が偶数のときは係数が負なので安定、n が奇数のときは係数が正なので不安定。

(ii) 固定点を求めると $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$ より $x = y = 0$。
$x = 0 + \Delta x$、$y = 0 + \Delta y$ とおいて代入すると

$$\frac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t} = -\Delta x(\Delta x - 1)(\Delta x + 1) - \Delta y = \Delta x - \Delta y + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\mathrm{d}\Delta y}{\mathrm{d}t} = 2\Delta x - \Delta y$$

よって行列表示すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

この固有値は $(1-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = 0$ の解。つまり、$\lambda^2 + 1 = 0$。よって $\lambda = \pm i$。となる。よって線形の範囲では、中立安定である。

(iii) 固定点を求めると $x^3 = 0$ より $x = 0$。それぞれの固定点について安定性解析をする。
$x = 0 + \Delta x$ とおいて代入し、展開すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x = -(0 + \Delta x)^3 = -(\Delta x)^3 + O\left(\Delta x^4\right)$$

線形の部分 (Δx の 1 次の部分) だけを考えると 0 なので中立安定のように思われるが、線形部分が 0 のときには、高次の項が重要となる。この場合は、$(\Delta x)^2$ の項も 0 なので、$(\Delta x)^3$ の項が重要となる。常に、$\Delta x < 0$ のときには $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x < 0$ かつ、$\Delta x > 0$ のときには $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x > 0$ であるので、すべての Δx について 0 に収束していく。「安定」の定義は「どんな摂動に対しても固定点に収束する」ことであるので、$x = 0$ は安定である。

III. **(i)** $z = re^{i\theta}$ とおいて代入する。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}e^{i\theta} + ire^{i\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

かつ、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{z} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}e^{-i\theta} - ire^{-i\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

より

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}e^{-i\theta} + \frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}t}e^{i\theta}\right] = \Re\left[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}e^{-i\theta}\right] = \Re\left[(a + i\omega)r - (1 + ib)r^3\right] = ar - r^3$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2ir}\left[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}e^{-i\theta} - \frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}t}e^{i\theta}\right] = -\frac{i}{r}\Im\left[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}e^{-i\theta}\right] = -\frac{i}{r}\Im\left[(a + i\omega)r - (1 + ib)r^3\right] = \omega - br^2$$

(ii) **(i)** の結果より、r 方向の時間変化は $a > 0$ より $0 < r < \sqrt{a}$ で増加、$r > \sqrt{a}$ で減少となる。つまり、$r = a$ に収束する。つまり、リミットサイクルは $r = \sqrt{a}$ と書ける。また、その時の周期は $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega - ba$ となるので、$T = \dfrac{2\pi}{\omega - ba}$ である。

(iii) $\Theta = \theta + f(r)$ とおいて、$\dfrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t} = \omega - ab$ に代入する。

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \omega - ab$$

より

$$\omega - br^2 + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\left(ar - r^3\right) = \omega - ab$$

となり、

$$\left(r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} + b\right)\left(a - r^2\right) = 0$$

よって、

$$r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} + b = 0$$

$$f(r) = -b\ln r + c$$

つまり、

$$\Theta(r, \theta) = \theta - b\ln r + c$$

となる。

IV. $\Delta\theta = \theta - \Omega t$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}(\Omega t + \Delta\theta)}{\mathrm{d}t} = \omega + K\sin\left(\Omega t - (\Omega t + \Delta\theta)\right)$$

変形すると

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} = \omega - \Omega - K\sin(\Delta\theta)$$

$\Delta\omega = \omega - \Omega > 0$ とおくと、$K < \Delta\omega$ のときには、常に $\dfrac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} > 0$ となり、同期しない。一方、$K > \Delta\omega$ のときには、$\dfrac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} > 0$ となる領域と $\dfrac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} < 0$ となる領域ができ、その境界の $\dfrac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} = 0$ となる点が固定点となる。

引き込むのは $\Delta\theta = 0$ で正であり、そこから θ の増加とともに減少することから、$\Delta\theta > 0$ で最初に $\Delta\theta$ 軸と交わる点が安定な固定点となる。よって $\sin\Delta\theta = \dfrac{\omega - \Omega}{K}$ となる点。つまり、$\Delta\theta = \arcsin\dfrac{\omega - \Omega}{K}$ で引き込む。

V. **(i)** 固定点を求めるため、$a_n = a_{n+1} = a_\infty$ とおいて、$a_\infty = 1 + a_\infty - {a_\infty}^3$ より $a_\infty = 1$。
$a_n = 1 + \Delta a_n$ とおいて代入すると、

$$1 + \Delta a_{n+1} = 1 + 1 + \Delta a_n - (1 + \Delta a_n)^3 = 1 - 2\Delta a_n + O\left({\Delta a_n}^2\right)$$

よって

$$\Delta a_{n+1} = -2\Delta a_n + O\left({\Delta a_n}^2\right)$$

より不安定。

(ii) 固定点を求めるため、$a_n = a_{n+1} = a_\infty$ とおいて、$a_\infty = \exp(1 - a_\infty)$ より $a_\infty = 1$。（これは、グラフを考えればわかる。）$a_n = 1 + \Delta a_n$ とおいて代入すると、

$$1 + \Delta a_{n+1} = \exp\left(2(-1 - \Delta a_n + 1)\right) = \exp(-2\Delta a_n) = 1 - 2\Delta a_n + O\left(\Delta {a_n}^2\right)$$

よって

$$\Delta a_{n+1} = -2\Delta a_n + O\left(\Delta {a_n}^2\right)$$

より不安定。

(iii) 固定点を求めるため、$a_n = a_{n+1} = a_\infty$ とおいて、$a_\infty = \dfrac{a_\infty}{2} + \dfrac{1}{a_\infty}$ より $a_\infty = \pm\sqrt{2}$。
$a_n = \pm\sqrt{2} + \Delta a_n$ とおいて代入すると、

$$\begin{aligned}
\pm\sqrt{2} + \Delta a_{n+1} &= \frac{\pm\sqrt{2} + \Delta a_n}{2} + \frac{1}{\pm\sqrt{2} + \Delta a_n} \\
&= \frac{\pm\sqrt{2} + \Delta a_n}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 \mp \frac{\Delta a_n}{\sqrt{2}} + \frac{\Delta {a_n}^2}{2}\right) + O\left(\Delta a_n^3\right) \\
&= \pm\sqrt{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}\Delta {a_n}^2 + O\left(\Delta {a_n}^3\right)
\end{aligned}$$

よって、

$$\Delta a_{n+1} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\Delta {a_n}^2 + O\left(\Delta a_n^3\right)$$

Δa_n の絶対値が小さい時、0 に収束するので、$a_n = \sqrt{2}$ は安定。
この方法は、平方根を求める際に非常に効率よく収束していきます。(Δa_n^2 しか残らないため。)

VI. VII. 略

講義のシラバス・資料など： http://cu.phys.s.chiba-u.ac.jp/lecture/busseiC/

北畑の連絡先：kitahata@physics.s.chiba-u.ac.jp, TEL:043-290-3723