

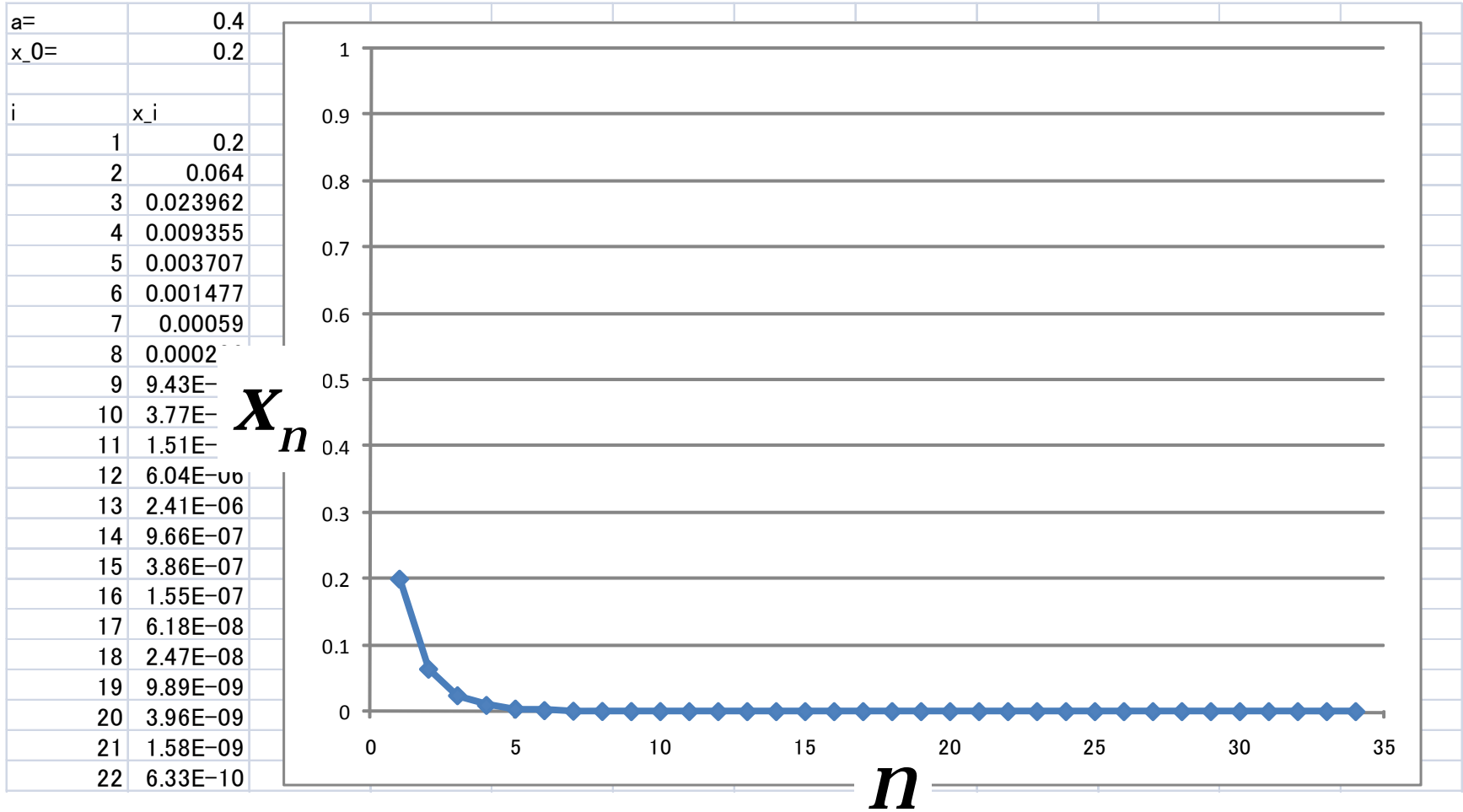
2015.1.20

物性物理学C

カオス と フラクタル

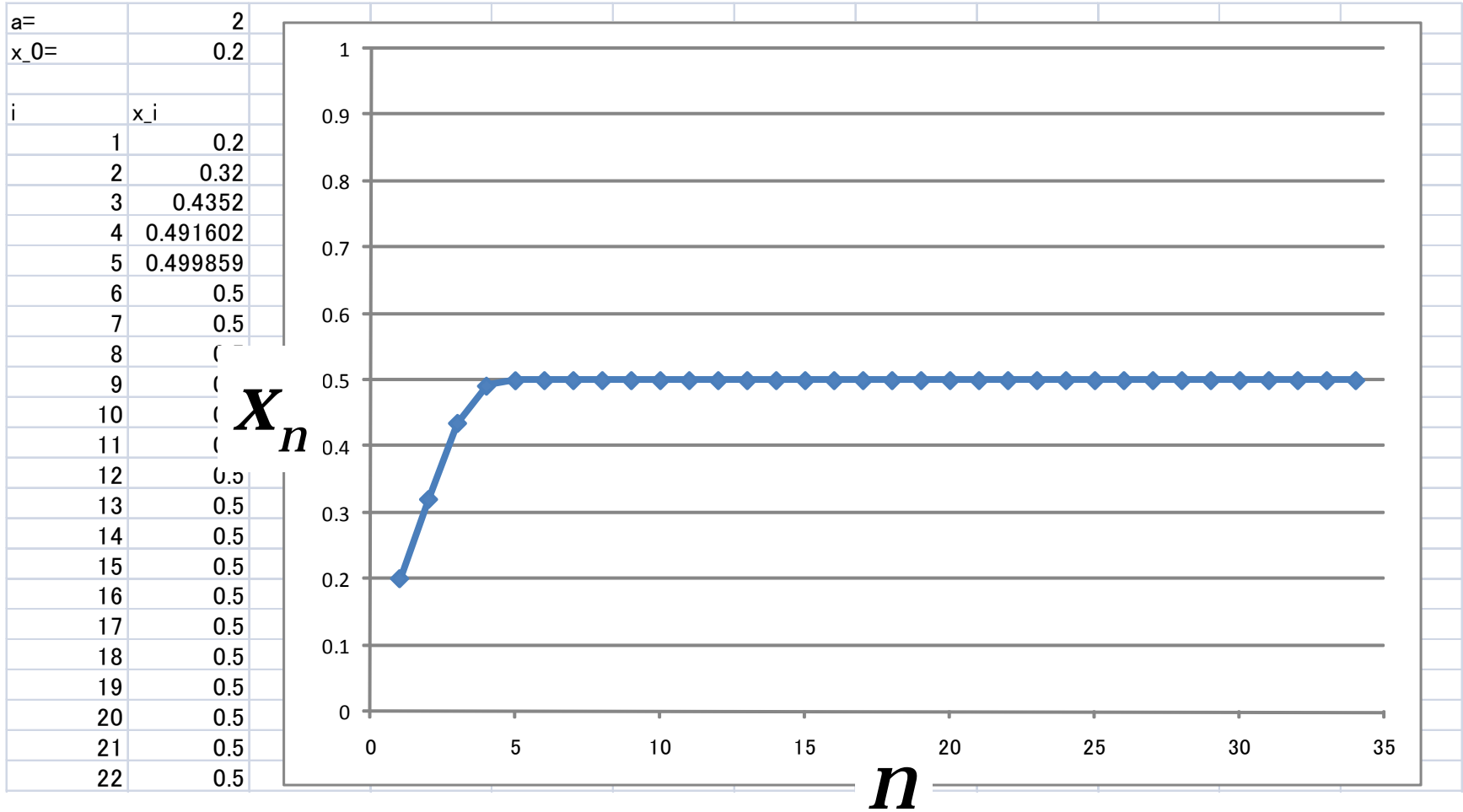
ロジスティック写像

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad a = 0.4$$



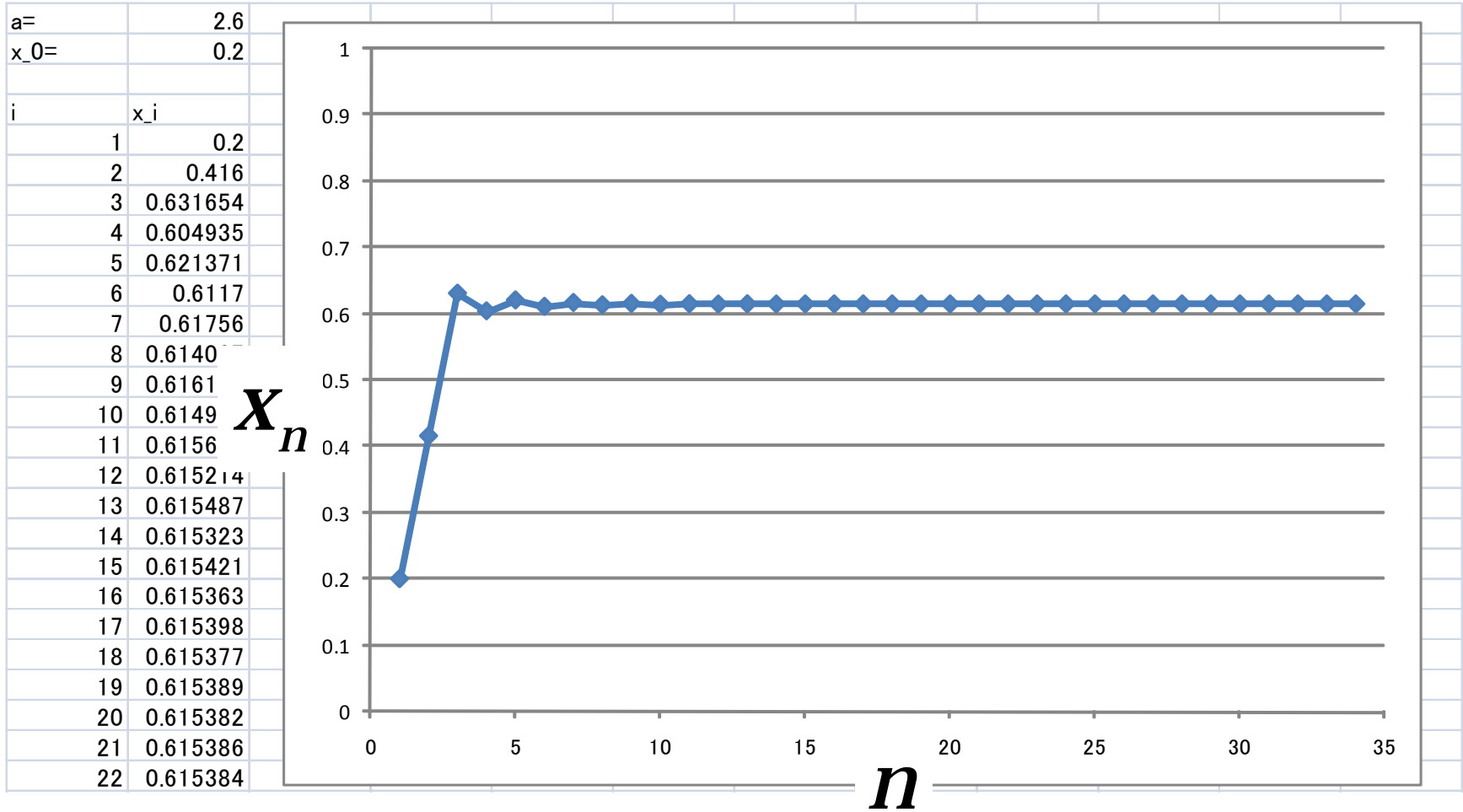
ロジスティック写像

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad a = 2.0$$



ロジスティック写像

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad a = 2.6$$



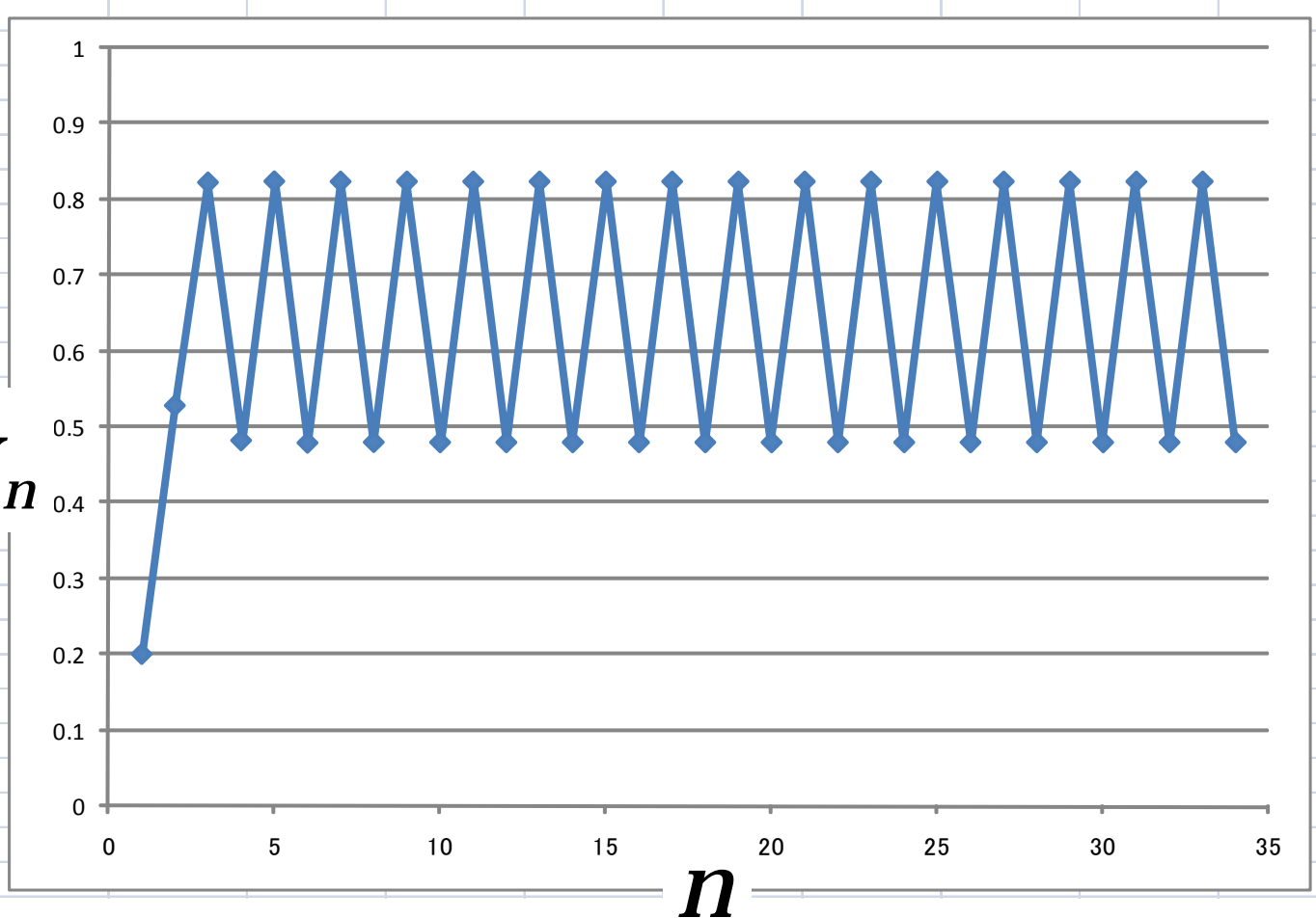
ロジスティック写像

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$$

$$a = 3.3$$

a=	3.3
x_0=	0.2
i	x_i
1	0.2
2	0.528
3	0.822413
4	0.481965
5	0.823927
6	0.478736
7	0.823508
8	0.4796
9	0.8236
10	0.4793
11	0.8235
12	0.479444
13	0.823606
14	0.479422
15	0.823603
16	0.479428
17	0.823603
18	0.479427
19	0.823603
20	0.479427
21	0.823603
22	0.479427

x_n

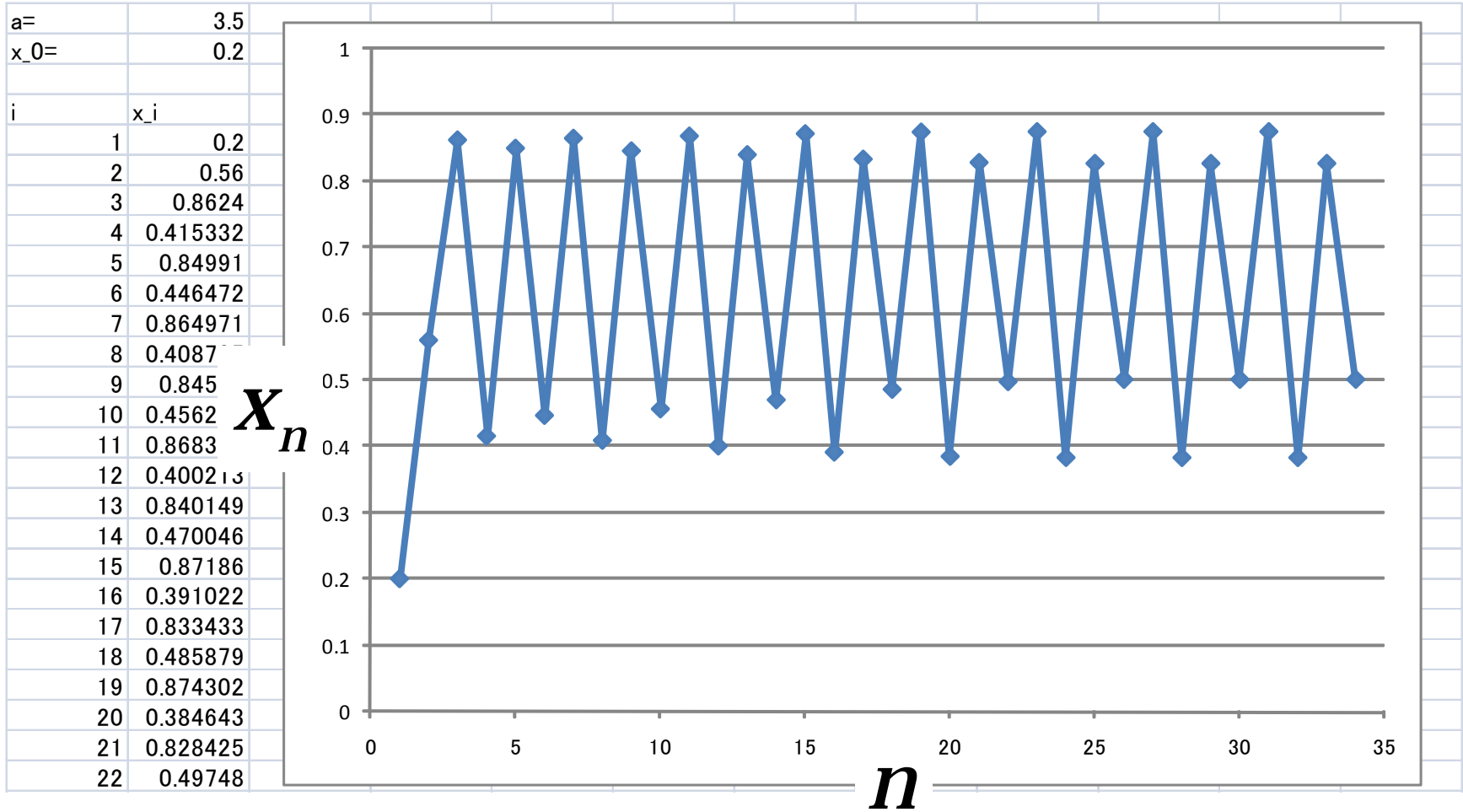


n

ロジスティック写像

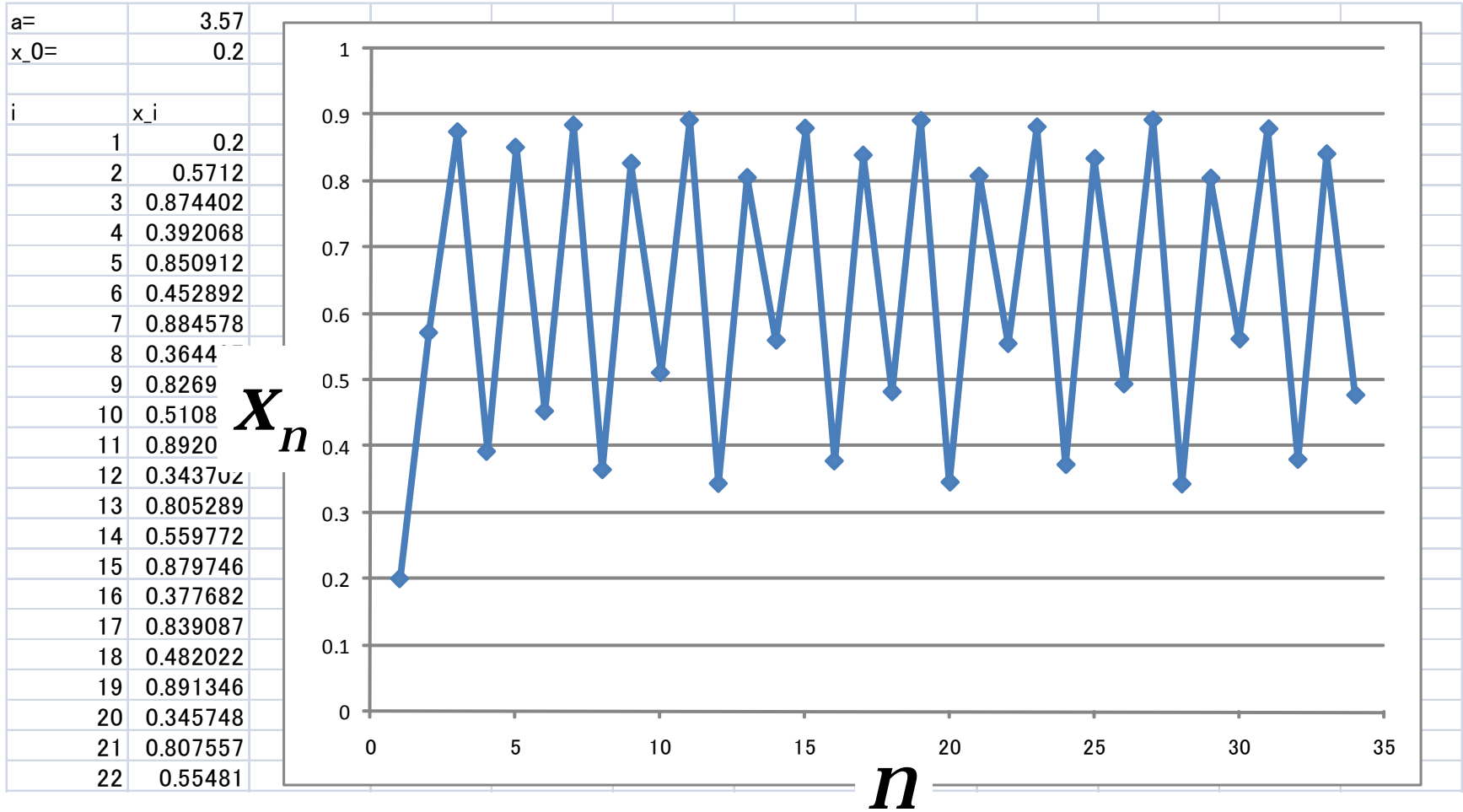
$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$$

$$a = 3.5$$



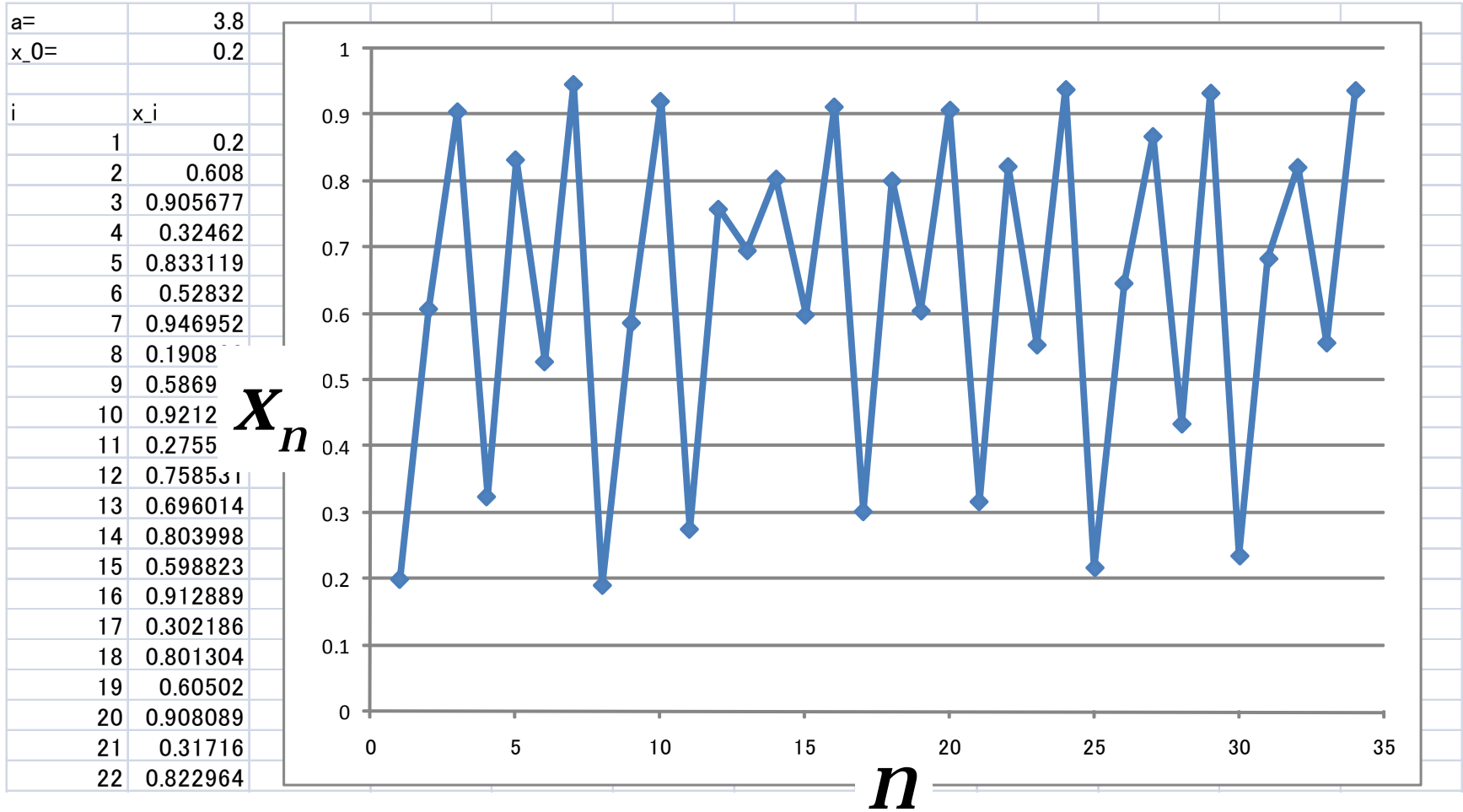
ロジスティック写像

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad a = 3.57$$



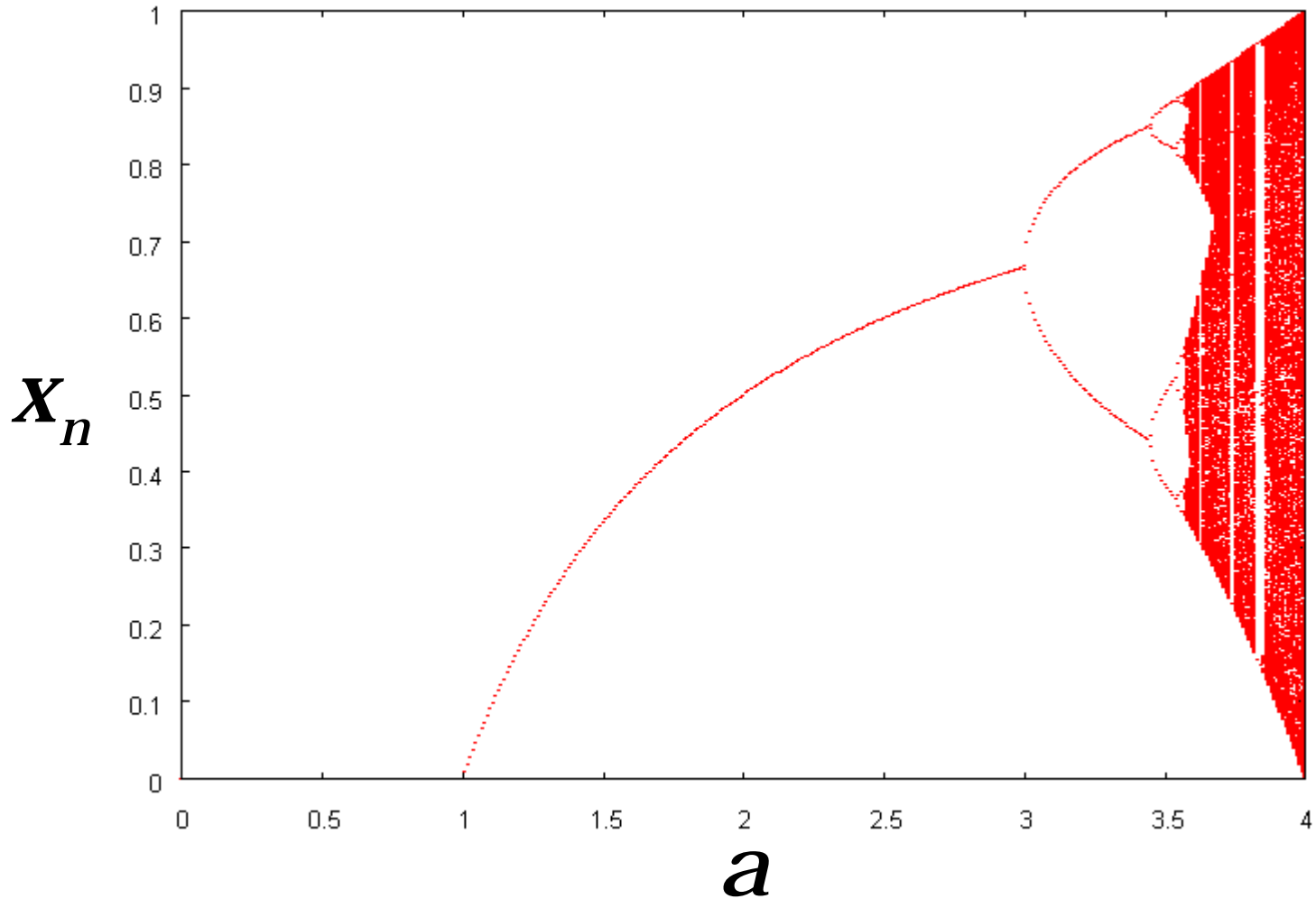
ロジスティック写像

$$X_{n+1} = aX_n(1 - X_n) \quad a = 3.8$$

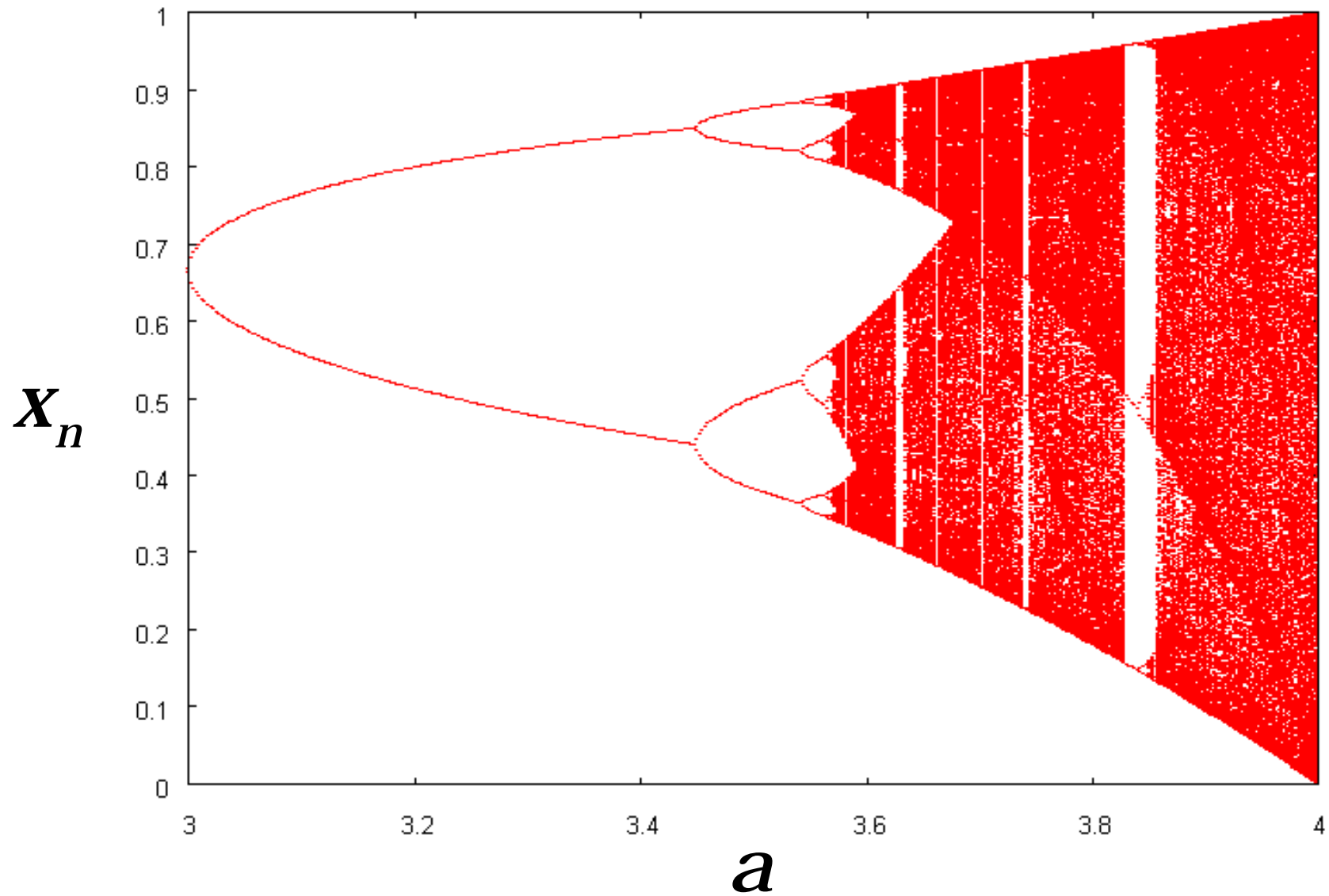


ロジスティック写像

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \text{ の収束点}$$



$3 < a < 4$ の拡大図



ローレンツカオス

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma(x - y)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y - xz + rx$$

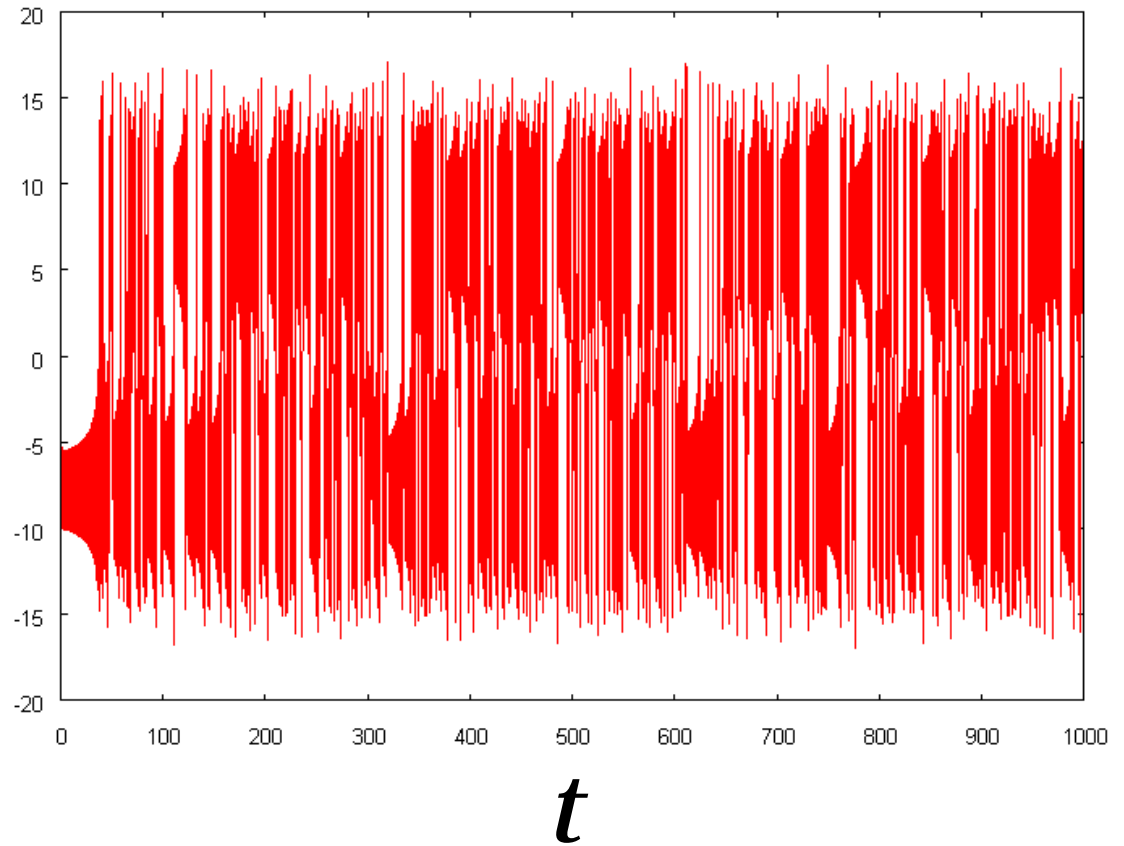
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

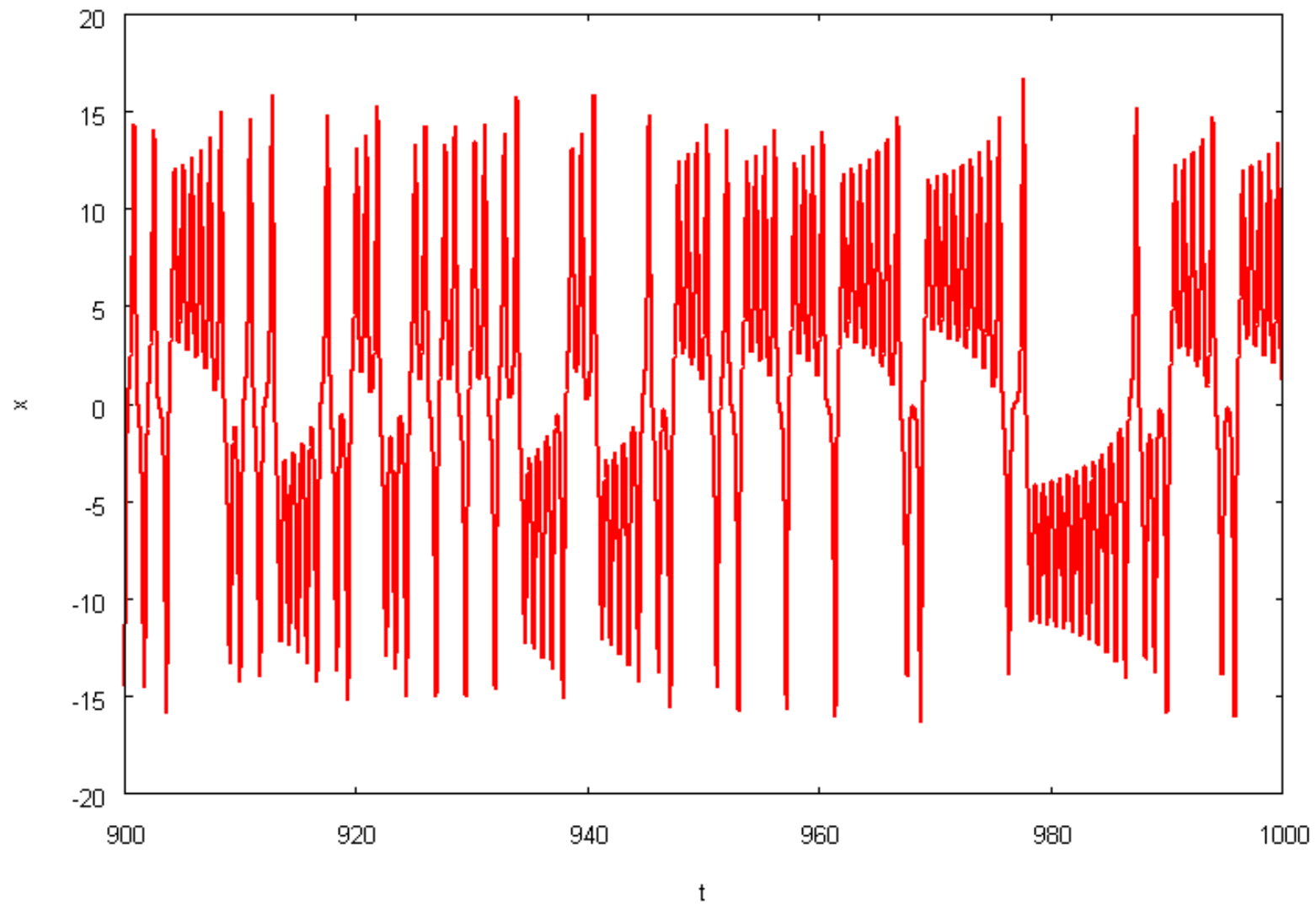
X

$$\sigma = 10$$

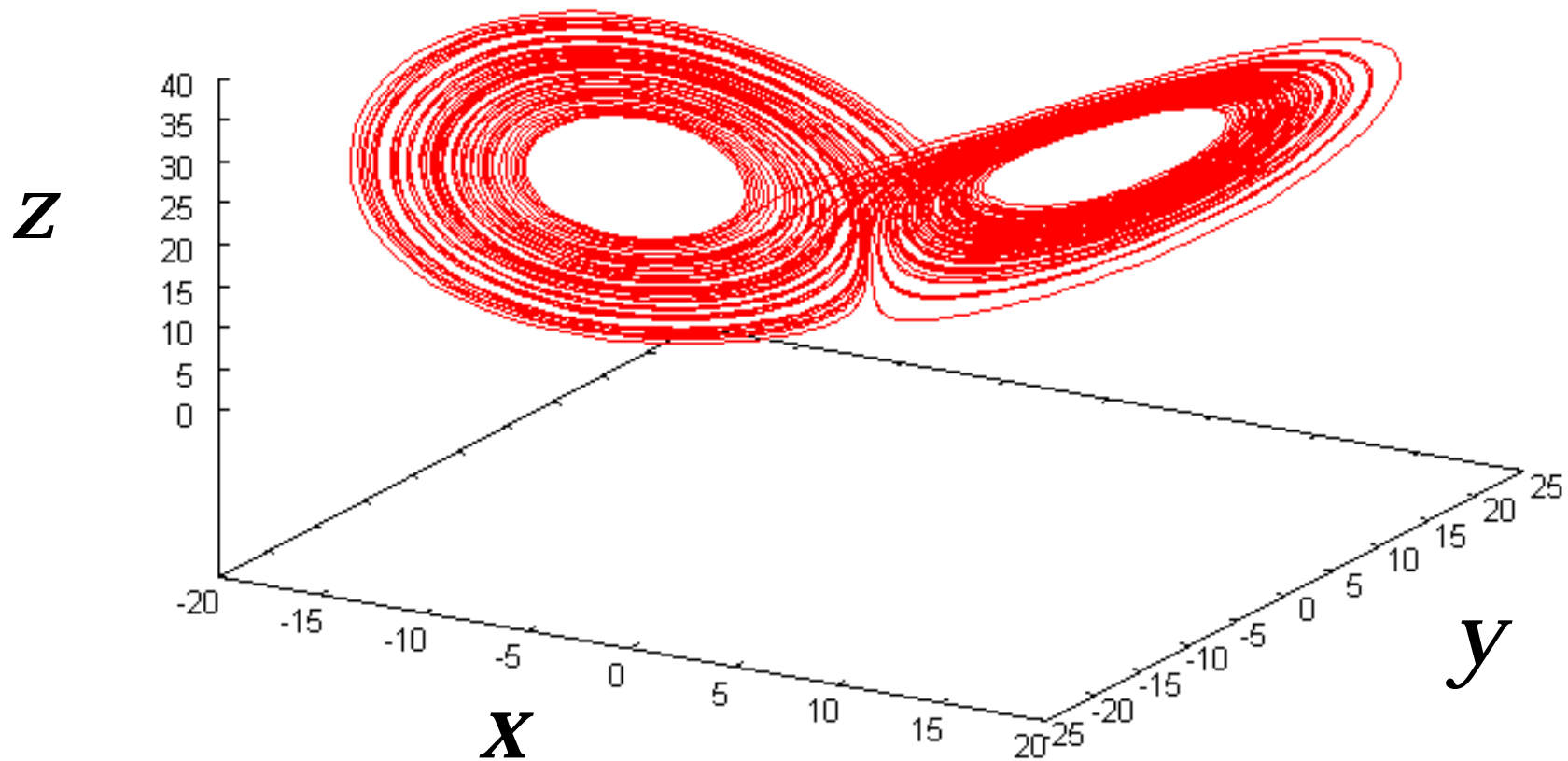
$$r = 24.17$$

$$b = \frac{8}{3}$$





相空間上では



(ストレンジアトラクター、ローレンツアトラクター)

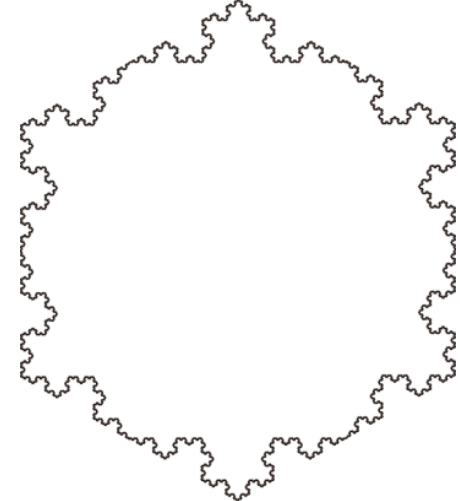
フラクタル

- ・ 自己相似な特徴を持つ図形

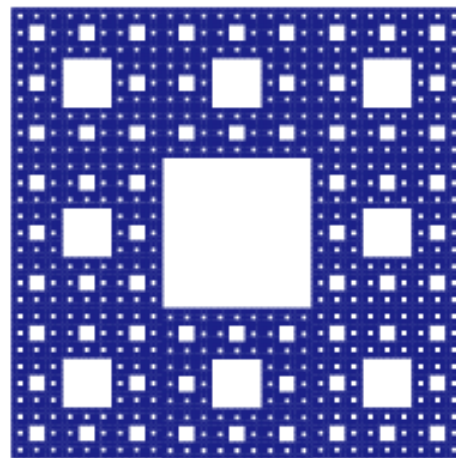
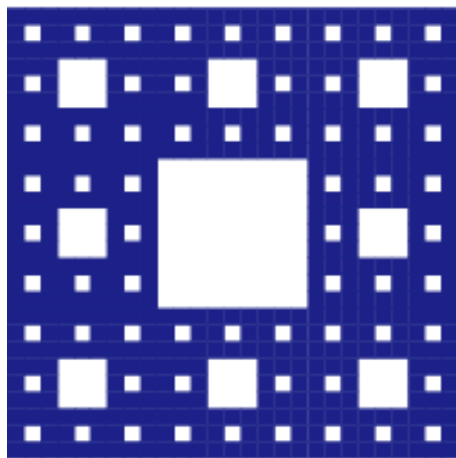
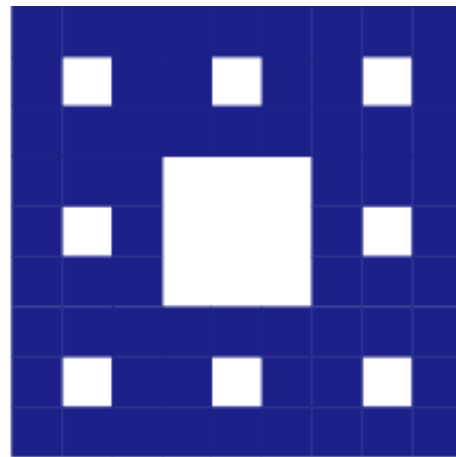
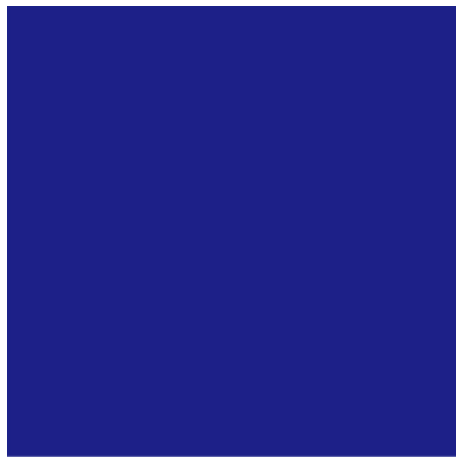
カントール集合 (Cantor set)



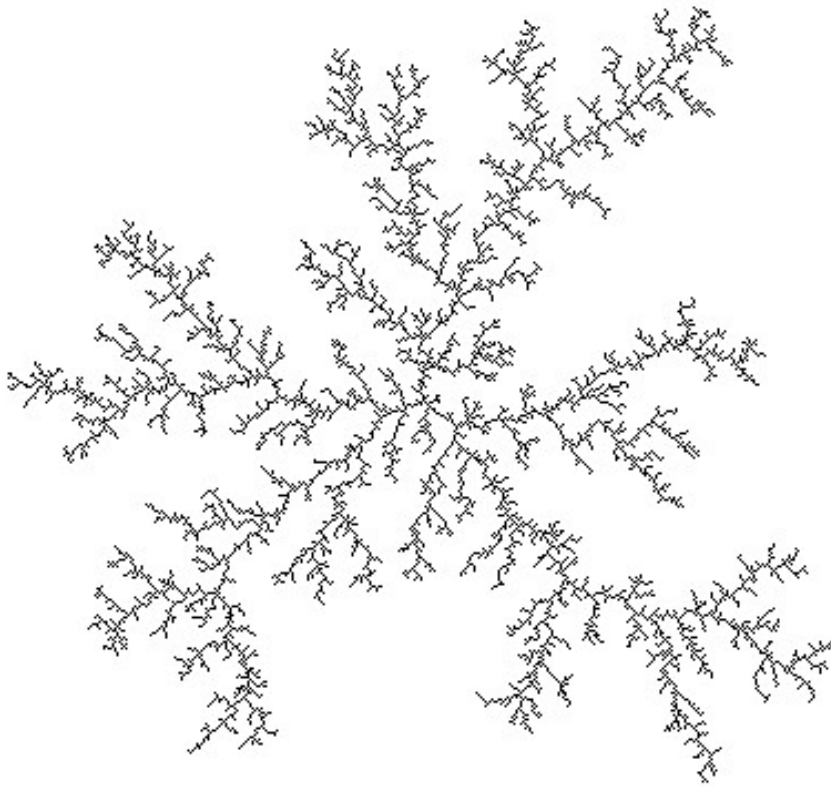
コッホ曲線 (Koch curve)



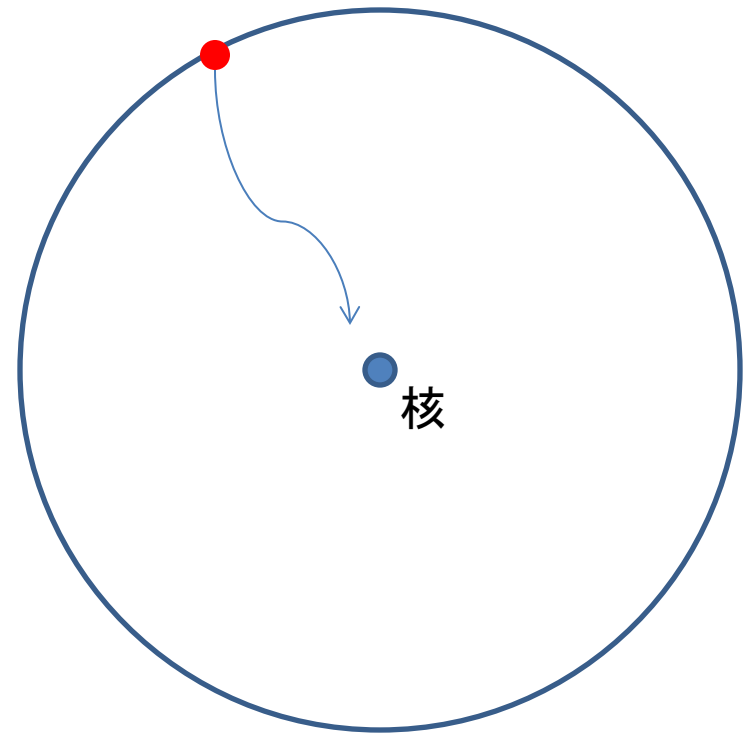
シェルピンスキーカーペット (Sierpinski carpet)



DLA (Diffusion Limited Aggregation: 拡散律速凝集) パターン



これもフラクタルであることが知られている
(統計的なフラクタル)



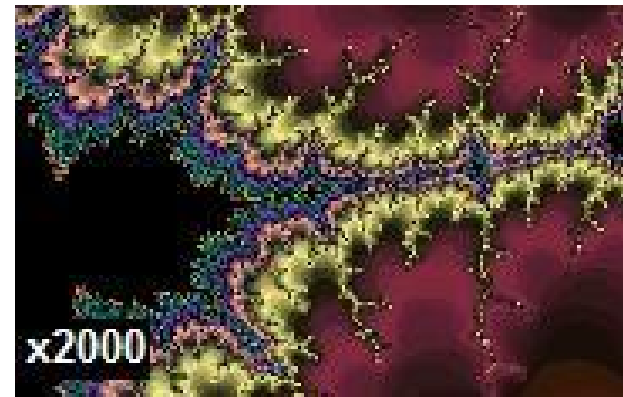
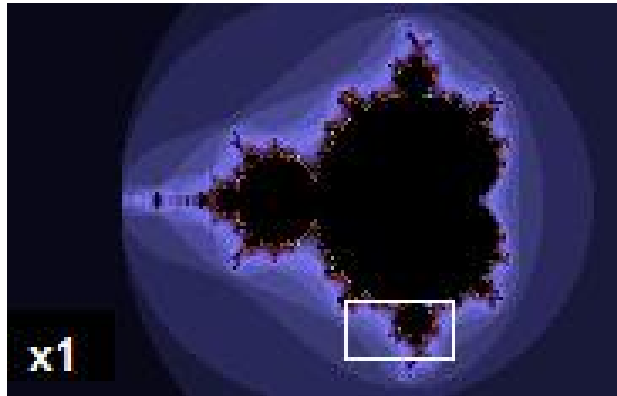
要素はBrown運動し、
核と接触したら固定される。



硫酸銅水溶液の電気分解により作られた"銅樹"

Wikipedia "Fractal" より

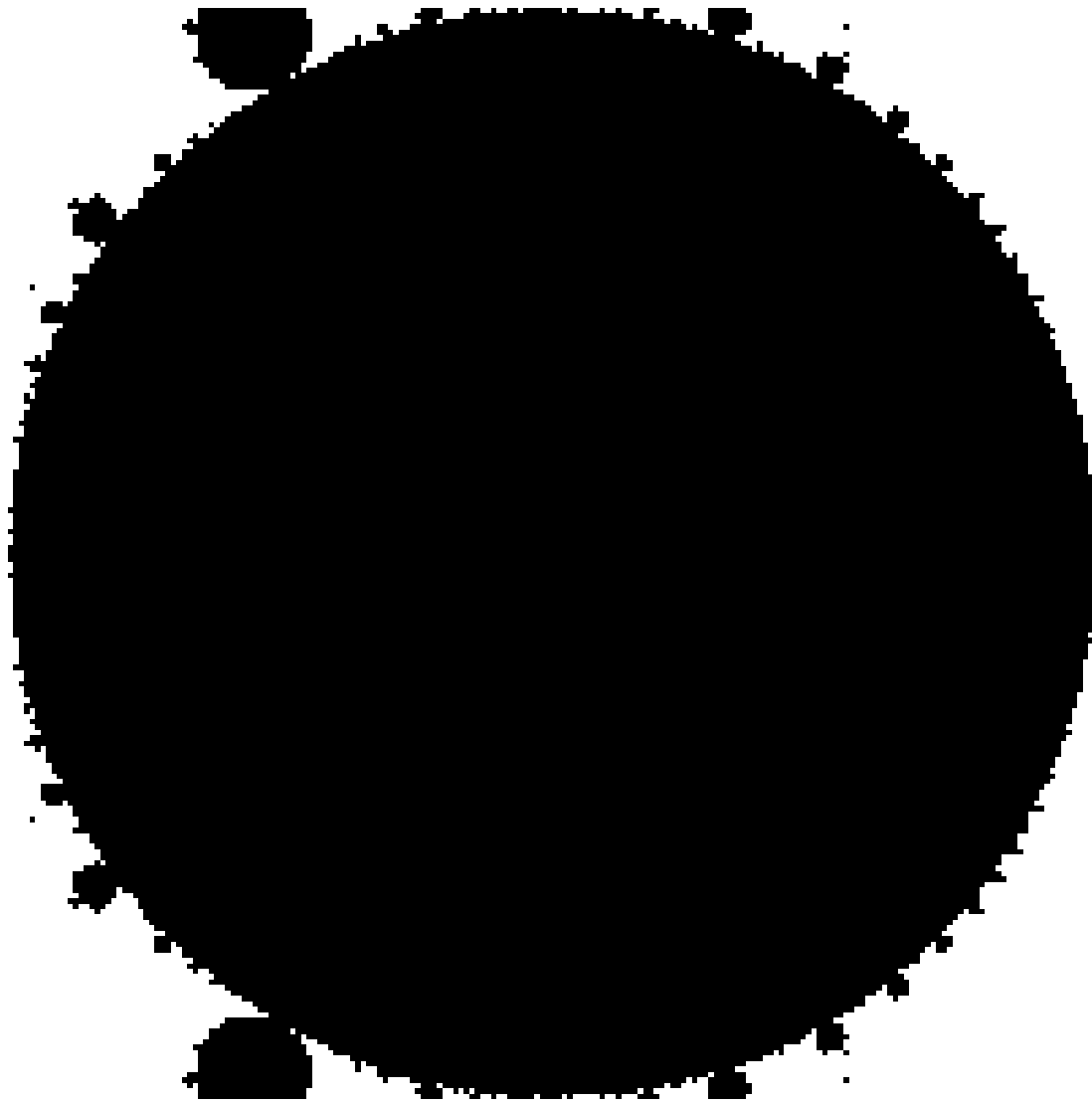
マンデルブロー集合 (Mandelbrot set)



複素数の写像 $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$

が無限大に発散しないcの領域

Wikipedia "フラクタル"より



Wikipedia "Mandelbrot set"より



ブロッコリー(?)



自己相似のアルゴリズム
で作ったシダの葉

Wikipedia "Fractal"より

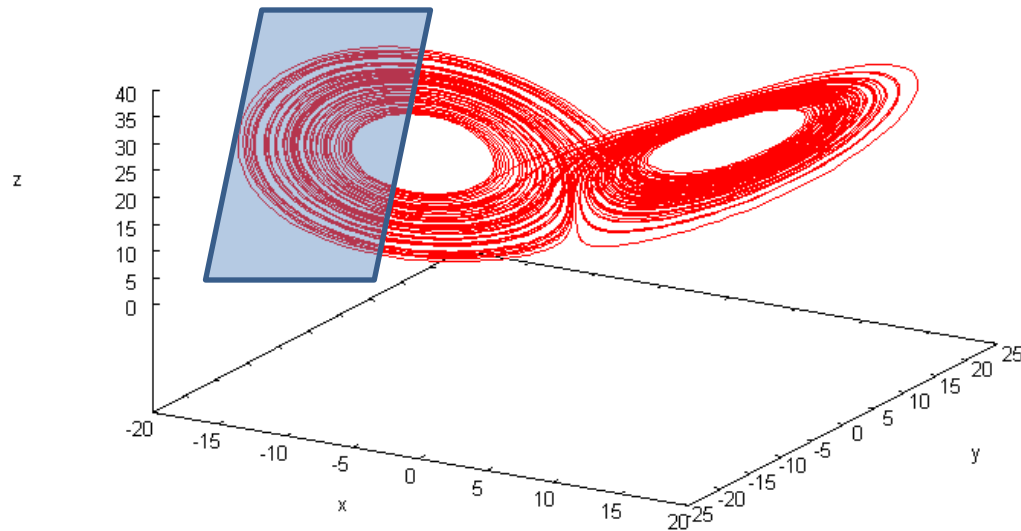
地形にみられるフラクタル(リアス式海岸)



google mapより

カオスとフラクタル

適当な面で切った断面：ポアンカレ断面



ポアンカレ断面で見るとカオスを示すときには断面がフラクタル的になっていると言われている。

