2015.2.4

物性物理学C 第2回レポート 略解

I. 以下のように固定点を求め、そのまわりに線形安定性解析を行う。

(a) 固定点を求めると $x = 0, \pm 1$。それぞれの固定点について安定性解析をする。
$x = 0$ まわりで $x = 0 + \Delta x$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t} = \Delta x - \Delta x^3 = \Delta x + O\left(\Delta x^2\right)$$

より不安定。
一方で、$x = \pm 1$ まわりで $x = \pm 1 + \Delta x$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t} = \pm 1 + \Delta x - (\pm 1 + \Delta)x^3 = -2\Delta x + O\left(\Delta x^2\right)$$

より安定

(b) 固定点を求めると $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$ より $x = y = 0$。
$x = 0 + \Delta x$、$y = 0 + \Delta y$ とおいて代入すると

$$\frac{\mathrm{d}\Delta x}{\mathrm{d}t} = -\Delta x(\Delta x - 1)(\Delta x + 1) - \Delta y = \Delta x - \Delta y + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\mathrm{d}\Delta y}{\mathrm{d}t} = \Delta x$$

よって行列表示すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

この固有値は $(1-\lambda)(0-\lambda) + 1 = 0$ の解。つまり、$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$。よって $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ となる。
よって、不安定である（unstable focus)。

(c) 固定点を求めると $x^n = 0$ より $x = 0$。それぞれの固定点について安定性解析をする。
$x = 0 + \Delta x$ とおいて代入し、展開する。
$n = 1$ のときは、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x = -(0 + \Delta x) = -\Delta x + O\left(\Delta x^2\right)$$

より、安定。$n \geq 2$ の場合は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x = -(0 + \Delta x)^n = -(\Delta x)^n$$

線形の部分 (Δx の 1 次の部分) だけを考えると 0 なので中立安定のように思われるが、線形部分が 0 のときには、高次の項が重要となる。この場合は、$(\Delta x)^n$ の項が最も効くはず（この場合はそれしかないが）である。
n が奇数の場合、常に、$\Delta x < 0$ のときには $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x < 0$ かつ、$\Delta x > 0$ のときには $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x > 0$ であるので、すべての Δx について 0 に収束していく。「安定」の定義は「どんな摂動に対しても固定点に収束する」ことであるので、$x = 0$ は安定である。
一方、n が偶数の場合には $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x > 0$、$\Delta x > 0$ のときには $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x > 0$ である。よって、$\Delta x > 0$ のときに固定点から離れていくので、不安定である。

II. **(a)** $z = x + iy$ として代入すると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x+iy) = (a+i\omega)(x+iy) - (1+ib)(x^2+y^2)(x+iy)$$

この右辺を展開して実部と虚部に分けると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x+iy) = \Big[ax - \omega y - (x^2+y^2)(x-by)\Big] + i\Big[ay + \omega x - (x^2+y^2)(y+bx)\Big]$$

これより、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax - \omega y - (x^2+y^2)(x-by)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ay + \omega x - (x^2+y^2)(y+bx)$$

が得られる。

(b) $z = re^{i\theta}$ とおいて代入する。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}e^{i\theta} + ire^{i\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

かつ、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{z} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}e^{-i\theta} - ire^{-i\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

より

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}e^{-i\theta} + \frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}t}e^{i\theta}\right] = \Re\left[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}e^{-i\theta}\right] = \Re\Big[(a+i\omega)r - (1+ib)r^3\Big] = ar - r^3$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2ir}\left[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}e^{-i\theta} - \frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}t}e^{i\theta}\right] = -\frac{i}{r}\Im\left[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}e^{-i\theta}\right] = -\frac{i}{r}\Im\Big[(a+i\omega)r - (1+ib)r^3\Big] = \omega - br^2$$

(c) **(ii)** の結果より、r 方向の時間変化は $a > 0$ より $0 < r < \sqrt{a}$ で増加、$r > \sqrt{a}$ で減少となる。つまり、$r = a$ に収束する。つまり、リミットサイクルは $r = \sqrt{a}$ と書ける。また、その時の周期は $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega - ba$ となるので、$T = \dfrac{2\pi}{\omega - ba}$ である。

III. $\Delta\theta = \theta - \Omega t$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}(\Omega t + \Delta\theta)}{\mathrm{d}t} = \omega + K\sin\left(\Omega t - (\Omega t + \Delta\theta)\right)$$

変形すると

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} = \omega - \Omega - K\sin(\Delta\theta)$$

$\Delta\omega = \Omega - \omega > 0$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} = -\Delta\omega - K\sin(\Delta\theta)$$

と書ける。よって、$K < \Delta\omega$ のときには、常に $\dfrac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} > 0$ となり、同期しない。

一方、$K > \Delta\omega$ のときには、$\dfrac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} > 0$ となる領域と $\dfrac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} < 0$ となる領域ができ、その境界の $\dfrac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} = 0$ となる点が固定点となる。

引き込むのは $\Delta\theta = 0$ で負であり、そこから $\Delta\theta$ の減少とともに増加することから、$\Delta\theta < 0$ で最初に $\Delta\theta$ 軸と交わる点が安定な固定点となる。よって $\sin\Delta\theta = -\dfrac{\Delta\omega}{K}$ となる点。つまり、$\Delta\theta = -\arcsin\dfrac{\Delta\omega}{K}$ で引き込む。

IV. **(a)** 固定点を求めるため、$a_n = a_{n+1} = a_\infty$ とおいて、$a_\infty = 1 - \frac{1}{2}a_\infty$ より $a_\infty = 2$。
$a_n = \frac{2}{3} + \Delta a_n$ とおいて代入すると、

$$\frac{2}{3} + \Delta a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \Delta a_n\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\Delta a_n$$

よって

$$\Delta a_{n+1} = -\frac{1}{2}\Delta a_n$$

より安定。

(b) 固定点を求めるため、$a_n = a_{n+1} = a_\infty$ とおいて、$a_\infty = (a_\infty - 2)^2)$ より $a_\infty = 1, 4$。
それぞれについて線形安定性解析を行う。$a_n = 1 + \Delta a_n$ とおいて代入すると、

$$1 + \Delta a_{n+1} = (1 + \Delta a_n - 2)^2 = 1 - 2\Delta a_n + O\left(\Delta {a_n}^2\right)$$

よって

$$\Delta a_{n+1} = -2\Delta a_n + O\left(\Delta {a_n}^2\right)$$

より不安定。
$a_n = 4 + \Delta a_n$ とおいて代入すると

$$4 + \Delta a_{n+1} = (4 + \Delta a_n - 2)^2 = 4 + 4\Delta a_n + O\left(\Delta {a_n}^2\right)$$

よって

$$\Delta a_{n+1} = 4\Delta a_n + O\left(\Delta {a_n}^2\right)$$

より不安定。

(c) 固定点を求めるため、$a_n = a_{n+1} = a_\infty$ とおいて、$a_\infty = \frac{1}{2}a_\infty + \frac{k}{2a_\infty}$ より $a_\infty = \pm\sqrt{k}$。
$a_n = \pm\sqrt{k} + \Delta a_n$ とおいて代入すると、

$$\begin{aligned}
\pm\sqrt{k} + \Delta a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{k} + \Delta a_n\right) + \frac{1}{2\left(\pm\sqrt{k} + \Delta a_n\right)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{k} + \Delta a_n\right) \pm \frac{1}{2\sqrt{k}}\left(1 \mp \frac{\Delta a_n}{\sqrt{k}} + \frac{\Delta {a_n}^2}{k}\right) + O\left(\Delta a_n^3\right) \\
&= \pm\sqrt{k} \pm \frac{1}{2\sqrt{k}}\Delta {a_n}^2 + O\left(\Delta {a_n}^3\right)
\end{aligned}$$

よって、

$$\Delta a_{n+1} = \pm\frac{1}{2\sqrt{k}}\Delta {a_n}^2 + O\left(\Delta a_n^3\right)$$

Δa_n の絶対値が小さい時、0 に収束するので、$a_n = \sqrt{2}$ は安定。
この方法は、平方根を求める際に非常に効率よく収束していきます。(Δa_n^2 しか残らないため。)

V. 略

VI. 略

講義のシラバス・資料など： http://cu.phys.s.chiba-u.ac.jp/lecture/busseiC/
北畑の連絡先：kitahata@physics.s.chiba-u.ac.jp, TEL:043-290-3723